ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

: Band 5 : :: Heft 2 ::
April 1925 Seite 89 bis 184

Mit den Vorträgen der Dresdener Versammlung vom 6. und 7. März

I N H A L T:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 5 **Ende April 1925** **Heft 2**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Versuche über den Spannungsverlauf in Rädern, welche durch eine Umfangskraft beansprucht sind.

Von **R. POSSELT** in Leoben (Steiermark).

Im Kranz und in den Armen von Rädern treten bei der Beanspruchung durch eine Umfangskraft Spannungen auf, deren Bestimmung nach den Regeln der Elastizitätstheorie große Schwierigkeiten bereitet. In der vorliegenden Arbeit werden die Spannungsverhältnisse untersucht und an Hand von Versuchen mit Rädermodellen bei verschiedenem Verhältnis vom Arm- zum Kranzquerschnitt möglichst klargelegt.

Bei der heute üblichen rechnerischen Behandlung praktischer Fälle denkt man sich gewöhnlich die radförmigen Gebilde in die Grundformen zerlegt, aus denen sie sich zusammensetzen. Für die einfache Berechnung der Einzelteile macht man dann oft noch Voraussetzungen, über deren Zutreffen meist Unklarheit herrscht. Bei gegossenen Rädern pflegt man so vorzugehen, daß man die Arme als bei der Nabe eingespannte Träger ansieht. Das andere Ende beim Kranz wird als frei angenommen. Beim Kranz wiederum hilft man sich so, daß man z. B. nur ein Stück desselben, welches entweder zwischen zwei Armen liegt oder sich zu beiden Seiten eines Armes befindet, in Rechnung zieht. Auch wird der Kranz hierbei meist nur als gerader Träger betrachtet.

Räder, welche der Hauptsache nach durch eine Umfangskraft beansprucht werden sind die Zahnräder. Bei Berechnung der Arme pflegen manche Autoren den Einfluß des Zusammenhanges der Arme mit dem Kranz in der Weise zu berücksichtigen, daß sie nur einige der vorhandenen Arme als arbeitsübertragend ansehen; andere wieder legen gleiche Beanspruchung der Arme zugrunde, gleichen aber das Unzutreffende dieser Annahme durch Wahl einer verhältnismäßig niedrigen zulässigen Biegungsspannung aus. Die bereits in der Fachliteratur angegebenen Formeln für die Berechnung der Arme bei Zahnrädern ergeben Differenzen bis zu 30 vH. Keine dieser Formeln gibt aber dem Konstrukteur jene Sicherheit, welche für die Beurteilung besonderer Fälle erwünscht wäre.

1. Allgemeine Betrachtungen. Räder mit Armen, welche durch eine Umfangskraft beansprucht werden, erhalten sowohl in den Armen als auch im Kranz Normal- und Schubspannungen. Die Größenverhältnisse dieser Spannungen werden unter sonst gleichen Verhältnissen durch die Lage des Angriffspunktes der Umfangskraft und das Verhältnis zwischen dem Arm- und Kranzquerschnitt, sowie des Rad- zum Nabendurchmesser bestimmt.

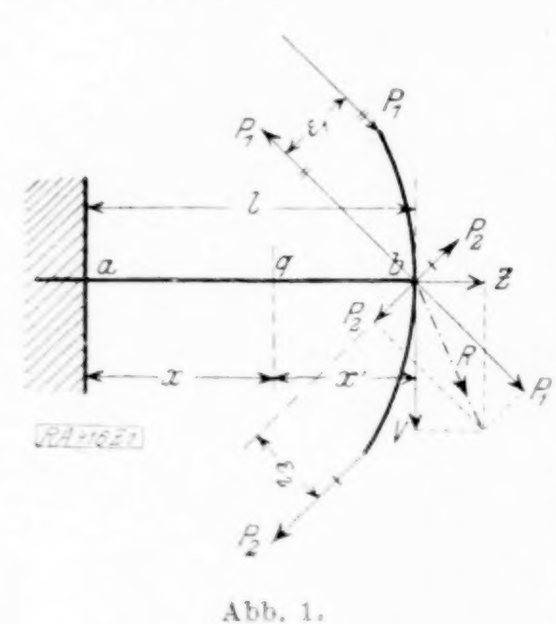


Abb. 1.

Zur Klarstellung der Verhältnisse soll zunächst ein Stab untersucht werden, der in nachstehender Weise belastet ist: Der Stab ist auf der einen Seite eingespannt, während er auf der anderen Seite ein Bogenstück von Kreisform angesetzt hat (Abb. 1).

An den beiden Enden des kreisförmigen Bogenstückes sollen Kräfte P_1 und P_2 in beliebigen Richtungen wirken. Die Kräfte sollen in der Ebene liegen, die durch das Bogenstück und den Stab bestimmt ist. Um den Einfluß dieser beiden Kräfte auf die Formänderung des Stabes ab zu untersuchen, werden sie in gleicher und entgegesetzter Richtung wirkend nach dem Punkt b verlegt. Es ergeben sich zwei Kräftepaare $m_1 = P_1 \varepsilon_1$ und $m_2 = P_2 \varepsilon_2$, die in der gleichen Ebene wirken und zwei Kräfte P_1 und P_2, welche man zur Resultierenden R vereinigen kann. Letztere läßt sich wieder in zwei Komponenten zerlegen, von welchen die eine in die Stabachse abfällt, d. i. Z und die andere V senkrecht dazu steht.

In einem Querschnitt q des Stabes ab in der Entfernung x von b tritt zunächst eine Biegungsbeanspruchung infolge des Momentes $M = V x \pm \underbrace{m_1 \pm m_2}_{m}$, ferner eine Zugbeanspruchung infolge der Zugkraft Z und ein Schubbeanspruchung hervorgerufen durch V auf. Die Momentenfläche für den Stab ab setzt sich deshalb aus einer Dreiecks- und Rechtecksfläche zusammen. Je nach der Richtung der Kräfte P_1 und P_2 werden sich die beiden Momentenflächen entweder addieren oder subtrahieren, je nach dem das Moment Vx gleich oder entgegengesetzt der algebraischen Summe der Momente m gerichtet ist. In beiden Fällen ist aber die resultierende Momentenlinie wieder eine **Gerade**. Für den Belastungsfall, daß die algebraische Summe der Momente m dem Moment Vx entgegengesetzt gerichtet ist, tritt im Stab ab eine Stelle auf, wo das resultierende Biegungsmoment Null ist. Dort ist also ein Wendepunkt der elastischen Linie. An der Einspannstelle des Stabes wird das Biegungsmoment ein Maximum $M = V l + m$. Die Formänderung des Stabes mit konstantem Querschnitt läßt sich bekanntlich für kleine Durchbiegungen durch die Gleichung

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = M_x$$

bestimmen. Die Momente der Biegung ändern sich bei dem Stabe von Querschnitt zu Querschnitt nach einer Geraden

$$M_x = \frac{M_b}{l} x - M_b .$$

Es ist also für die elastische Linie des Stabes:

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M_b}{l} x - M_b .$$

Für $x = 0$, ist $dy/dx = 0$, wenn man vollkommene Einspannung voraussetzt, ferner auch $y = 0$, daher ergibt sich die Integration:

$$\underline{y = \frac{M_b}{2 E J}\left(\frac{x^3}{3 l} - x^2\right)},$$

y soll nach **abwärts** gerichtet **negativ** zählen.

Ist demnach die Lage des Wendepunktes im Arm bekannt und ebenso das Moment an der Einspannstelle, so läßt sich für jede Stelle die Durchbiegung mit großer Annäherung errechnen.

Betrachtet man nun die Formänderung eines durch eine tangentiale Umfangskraft beanspruchten Rades, bei welchem die Arme an beiden Enden eingespannt sind, z. B.

angegossen, so zeigt sich, daß die Arme in der gleichen Weise beansprucht werden, wie der eben behandelte Stab. Es ist hier behufs Vereinfachung zweckmäßig, die Arme mit anhaftenden Kranzstücken herauszuschneiden, und zwar den Schnitt im Kranz dort zu führen, wo eine Aenderung der Krümmung infolge der Belastung nicht stattgefunden hat, wo also das Biegungsmoment gleich Null ist.

Die Kräfte P_1 und P_2, welche jetzt an den Kranzstücken zur Wirkung kommen sind in ihren Richtungen durch eine Bedingung bestimmt. Es muß nämlich die Resultierende R, welche sich im Punkt b aus P_1 und P_2 ergibt, bei allen Armen die gleiche Durchbiegung in der Richtung der verdrehenden Umfangskraft ergeben.

Berücksichtigt man noch, daß das Moment m, welches sich durch die Verlegung von P_1 und P_2 nach b ergibt, einmal im Sinne und einmal entgegengesetzt dem Moment Vx wirken kann, so ergeben sich sechs mögliche Fälle. In den Abb. 2 und 3 sind diese sechs Fälle eingezeichnet, wobei die zusammengehörigen Kräfte und Momente durch gleiche Strichzahl bezeichnet erscheinen.

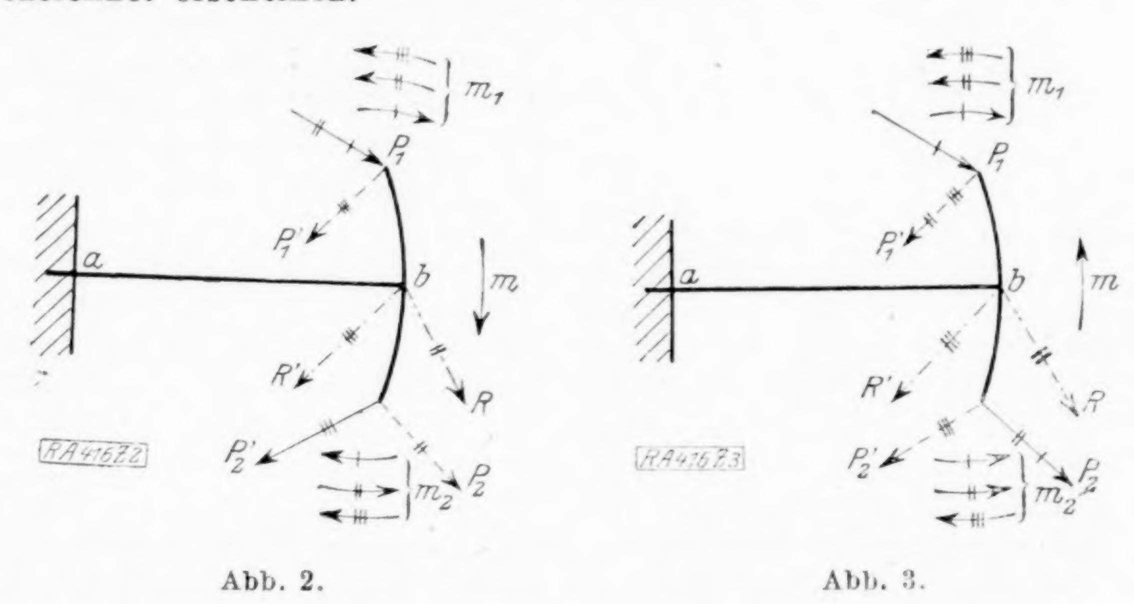


Abb. 2. Abb. 3.

Diese sechs Fälle können bei einem beanspruchten Rade in verschiedener Zusammenstellung vorkommen. Nachstehend sind die bei zwei aufeinanderfolgenden Armen möglichen Kombinationen gezeichnet.

In Abb. 4 wurde bei beiden Armen die Krümmung des Kranzes an der Innenseite des Segmentes nächst den Armen vergrößert. Es müssen also zwei Punkte (1 und 2) im Kranz vorhanden sein, wo die Krümmung den ursprünglichen Wert wieder besitzt,

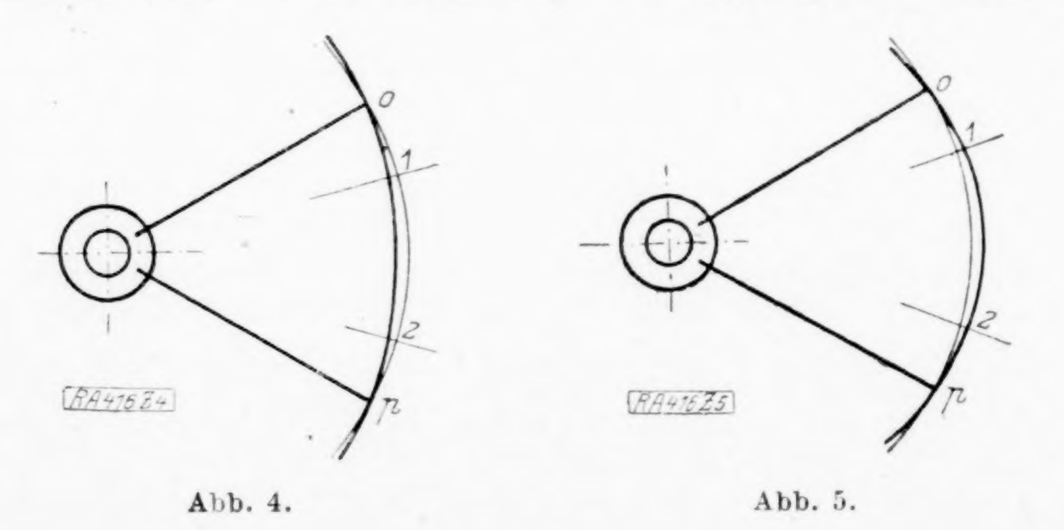


Abb. 4. Abb. 5.

da daß zwischen Punkt 1 und 2 gelegene Kranzstück eine Krümmung aufweisen wird, welche kleiner ist als die ursprüngliche. Es sind demnach im Kranzstück zwischen zwei Armen zwei Stellen, wo das biegende Moment gleich Null ist. (Dabei ist vorausgesetzt, daß die beiden Punkte o und p nur wenig ihre Entfernung ändern.)

Im zweiten Fall (Abb. 5) tritt ein gleiches Verhalten des Kranzes ein, nur werden hier die zu einem Segment gehörigen und den beiden Armen zunächstliegenden Kranzstücke aufgebogen; es sind, nachdem das zwischen den Punkten 1 und 2 liegende Kranzstück eine kleinere Krümmung als die ursprüngliche erhalten wird, wieder zwei Stellen mit dem Biegungsmoment gleich Null im Kranzsegment vorhanden.

Im letzten Fall endlich (Abb. 6) wird nur ein Punkt zwischen zwei Armen im Kranz auftreten, wo die ursprüngliche Krümmung bleibt, es ist nur eine Stelle im Kranzstück, wo $M = 0$ ist.

Damit ist nachgewiesen, daß im Kranzstück zwischen zwei Armen

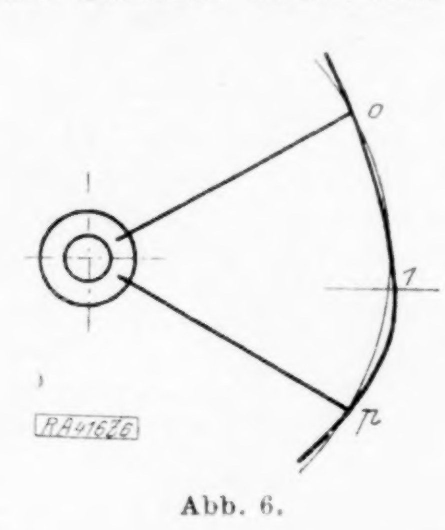


Abb. 6.

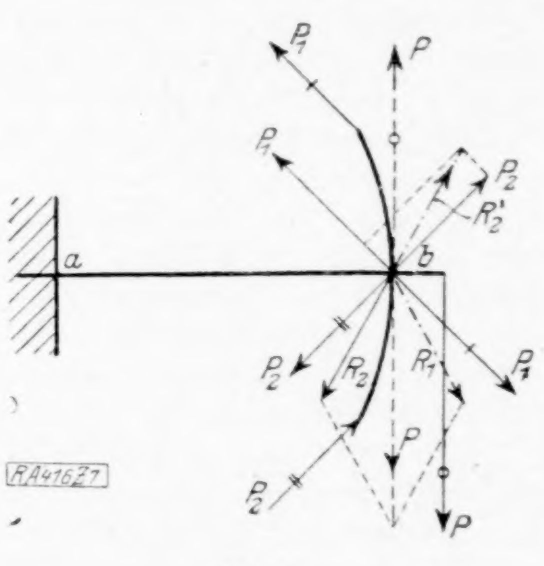


Abb. 7.

Stellen vorkommen, wo das biegende Moment Null ist.

Die Verhältnisse ändern sich bei jenem Arm etwas, bei welchem die Umfangskraft unmittelbar angreift (Abb. 7).

Von der Umfangskraft P wird eine Komponente R_1 auf die am Arm biegend einwirkende Kraft V und die Normalkraft Z entfallen, während die zweite Komponente dem Zusammenhang mit dem Kranz entspricht. Diese zweite Komponente R_2 ist also jene Kraft, welche der Resultierenden R_2' aus den am anhaftenden Kranzstück angreifenden Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht hält. Je nach der Größe des Trägheitsmomentes der Arme und des Kranzes werden die beiden Komponenten R_1 und R_2 der Kraft P verschieden ausfallen. In einem Fall, wo der Kranz verhältnismäßig schwach gegenüber den Armen ist, wird derjenige Arm, bei welchem die Umfangskraft eben angreift, den größten Teil des Drehmomentes übertragen, während im entgegengesetzten Fall eine gleichmäßigere Verteilung auf alle Arme eintritt.

Wird nun der Kranz beiderseits eines Armes an jenen Stellen durchschnitten, wo das biegende Moment Null ist, dann sind für den Arm mit den anhaftenden Kranzstücken die gleichen Verhältnisse gegeben, wie für den eingangs besprochenen Stab mit den angesetzten Bogenstücken.

2. Die Einrichtung der Versuche. Bei den Versuchen des Verfassers wurde die Bestimmung der Größe des biegenden Momentes an ausreichend vielen Stellen der Arme und des Kranzes von Rädermodellen, welche durch eine Umfangskraft belastet waren, angestrebt. Aus dem Verlauf der Momentenlinie sollte das Vorhandensein von Wendepunkten in der elastischen Linie der Arme und des Kranzes nachgewiesen und deren Lage bestimmt werden. Durch Untersuchung von Rädermodellen mit verschiedener Armzahl und gleichem, sowie verschiedenem Arm- und Kranzträgheitsmoment sollte der Einfluß dieser Umstände auf die Größe der Beanspruchung und die Ausbildung und Lage der Wendepunkte ermittelt werden.

Behufs Erreichung des eben angeführten Zweckes wurden Modelle von Armrädern hergestellt und diese durch Umfangskräfte, welche tangential wirkten, belastet. Die hierbei auftretenden Formänderungen des Kranzes und der Arme wurden unter Zuhilfenahme von eigens für diese Untersuchungen konstruierten Vorrichtungen gemessen, bezw. festgelegt und aus diesen die Hauptbeanspruchungen an mehreren Stellen der Räder ermittelt.

a) Gegenstand der Messung. Die Größe des biegenden Momentes an irgend einem Punkte des belasteten Rades wurde aus dem Krümmungsradius an der betreffenden Stelle errechnet. Nach der Beziehung: $1/\varrho = M/EJ$ ergibt sich: $M = EJ/\varrho$, wenn M das biegende Moment, J das Trägheitsmoment des Querschnittes an dieser Stelle, ϱ der Krümmungsradius an diesem Punkte und E der Elastizitätsmodul des Materials ist. Um M bestimmen zu können, ist es nötig, die drei Größen E, J und ϱ möglichst genau zu kennen. Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde der Elastizitätsmodul des Versuchsmaterials durch einen den Verhältnissen angepaßten Versuch ermittelt, während sich das Trägheitsmoment aus den genau gemessenen Dimensionen des Querschnittes errechnen ließ

Die Bestimmung des Krümmungsradius erfolgte aus der elastischen Linie des belasteten Rades, indem der von den Tangenten zweier aufeinanderfolgender Punkte eingeschlossene Winkel mit Hilfe eines Spiegelapparates so genau als möglich gemessen wurde. (Abb. 8.)

Kennt man die Entfernung der Punkte a und b, so läßt sich aus der Ablesung $2e$ und dem bekannten Abstand A der Krümmungsradius berechnen. Um e zu erhalten, wurde zuerst im Punkt a ein Ablesespiegel s aufgesetzt und so anvisiert, daß der senkrecht zum Maßstab zurückgeworfene Strahl die Mitte des Maßstabes zeigte. Setzt man hierauf den Spiegel nach b, so erhält man als Ablesung den Wert $2e$, abgesehen von dem Fehler, welcher durch Benützung eines geraden Maßstabes auftritt. (Abb. 8.)

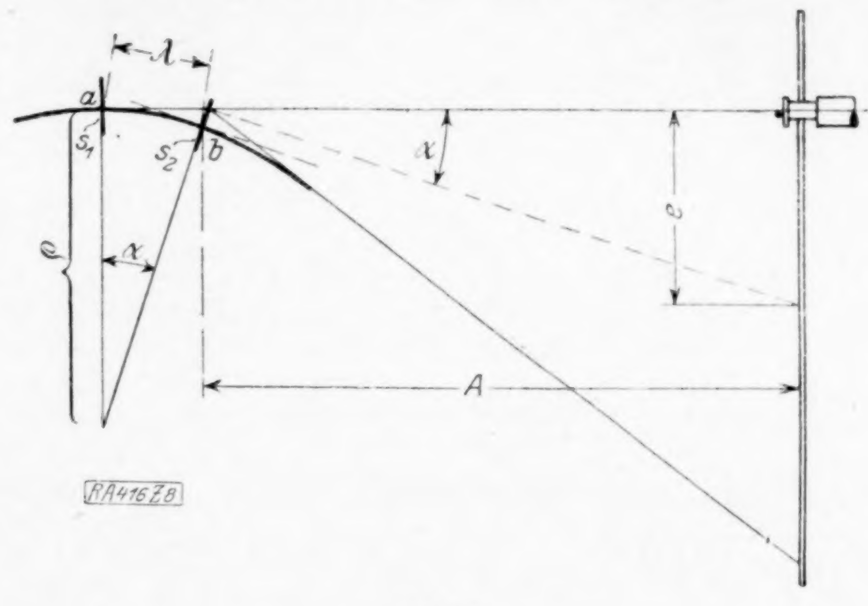


Abb. 8.

Wie aus 1 hervorgeht, ist die Formänderung an irgend einer Stelle des Kranzes und der Arme eine Folge des dort auftretenden Biegungsmomentes M, sowie der dort vorhandenen Schubkraft S und der Normalkraft Z. Ausschlaggebend ist vor allem die Biegungsbeanspruchung und es ist hier zulässig, den Einfluß der Zug- bezw. Druck- und Schubbeanspruchung auf die Größe des Krümmungsradius zu vernachlässigen, wie eine einfache Rechnung beweist.

b) Die Versuchskörper. Die Versuche wurden mit vier Rädermodellen vorgenommen, welche die Bezeichnung A, B, C, D erhalten sollen.

Das Material für die Versuchsräder war kaltgewalzter, naturharter Uhrfeder-Bandstahl.

Die Querschnittsform des benützten Stahles war die rechteckige mit 20 mm Breite und verschiedener Dicke. Er gelangte ohne weitere Bearbeitung zur Verwendung.

Auf Grund eines Versuches ermittelte sich der Elastizitätsmodul mit ungefähr 2 000 000 kg/qcm und die Proportionalitätsgrenze mit 3600 kg/qcm.

Sämtliche Versuchsräder haben einen Außendurchmesser von 750 mm und einen Nabendurchmesser von 120 mm. Die übrigen Abmessungen sind verschieden.

Rad : A ist ein vierarmiges, bei welchem der Kranz- und Armquerschnitt das gleiche Trägheitsmoment besitzen. Arm- und Kranzquerschnitt ist rechteckig von 20 mm Breite und 1 mm Dicke.

Rad : B ist ebenfalls vierarmig, doch ist das Trägheitsmoment des Armes ungefähr das zehnfache von jenem des Kranzes. Arm- und Kranzquerschnitt ist rechteckig, je 20 mm breit und von 1 mm bezw. 0,7 mm Dicke.

Rad : C ist sechsarmig und ist bei diesem das Arm- und Kranzträgheitsmoment gleich und von derselben Größe wie bei Rad A.

Rad : D ist auch sechsarmig und ist das Armträgheitsmoment wieder ungefähr zehnmal so groß wie das Kranzträgheitsmoment. Abmessungen wie bei Rad B.

Mit der Wahl des Verhältnisses von zehn zwischen Arm- und Kranzträgheitsmoment war beabsichtigt in die Untersuchungen ein vier- bezw. sechsarmiges Rad einzubeziehen, bei denen angenähert jene Verhältnisse zutreffen, wie sie z. B. bei ausgeführten Zahnrädern vorliegen.

Die Herstellung der Versuchsräder erfolgte in der Weise, daß von einem Stahlband der vorangeführten Abmessungen die Längen für den Kranz und die einzelnen Arme abgeschnitten wurden. Die Verbindung der Arme mit dem Kranz und der aus Rotguß hergestellten Nabe erfolgte durch Weichlöten, wobei die Stoßstelle der beiden Kranzenden zur Anschlußstelle eines Armes verlegt wurde.

Die Arme und der Kranz außen wurden vor dem Zusammenlöten mit Teilstrichen versehen. Diese waren in der Entfernung von 1 cm mit einer Stahlnadel ganz leicht eingeritzt. Die Lage der Teilstriche geht aus den Tafeln hervor.

Rad A

Durchmesser D = 750 mm
vierarmig mit gleichem Arm- und Kranzquerschnitt
Nabendurchmesser d = 120 mm

dargestellt sind die Biegungsmomente
Längenmaßstab: 1 mm = 1 mm
Momentenmaßstab: 250 gmm = 1 mm
1:6 natürl. Größe

Belastungsfälle:
die Umfangskraft P wirkt tangential im Abstand A = 378 mm vom Radmittelpunkte

I. Fall: P = 400 g angreifend nahe dem Arm III bei dem Teilpunkt 118,5
übertragenes Drehmoment M_d = 151200 gmm dargestellt durch

II. Fall: P = 400 g angreifend zwischen Arm III und IV bei dem Teilpunkt 147,3
übertragenes Drehmoment M_d = 151200 gmm dargestellt durch

III. Fall: P = 100 g angreifend nahe dem Arm III bei dem Teilpunkt 118,5
übertragenes Drehm. M_d = 37800 gmm dargestellt durch

maximale Biegungsmomente treten auf
im Arm III: M_{III} = 41200 gmm, wenn nach Fall I belastet,
im Kranz: M'_{IV} = 15930 gmm, wenn nach Fall II belastet.

Abb. 15.

RA416 Z I

3. Der Verlauf der Versuche. Das jeweils zu untersuchende Rad wurde auf ein eben gehobeltes Brett so befestigt, daß die obere Radebene genau nach der Wasserwage eingestellt war. Durch die vertikale Anordnung der Radachsen wurde der Einfluß des Rad-Eigengewichts auf die Formänderung ausgeschaltet.

Die Belastungsvorrichtung war nach nebenstehender Skizze ausgebildet und hatte 7 g Eigengewicht, so daß dessen Einfluß auf die Formänderung des Rades durch die Tangentialkraft vernachlässigt werden konnte. (Abb. 9.)

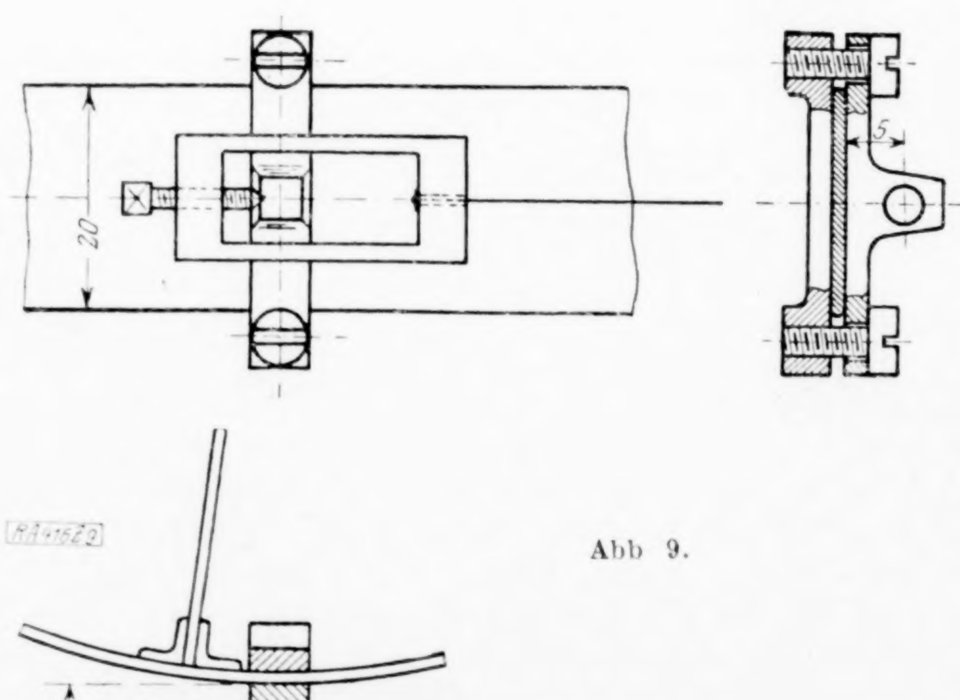


Abb 9.

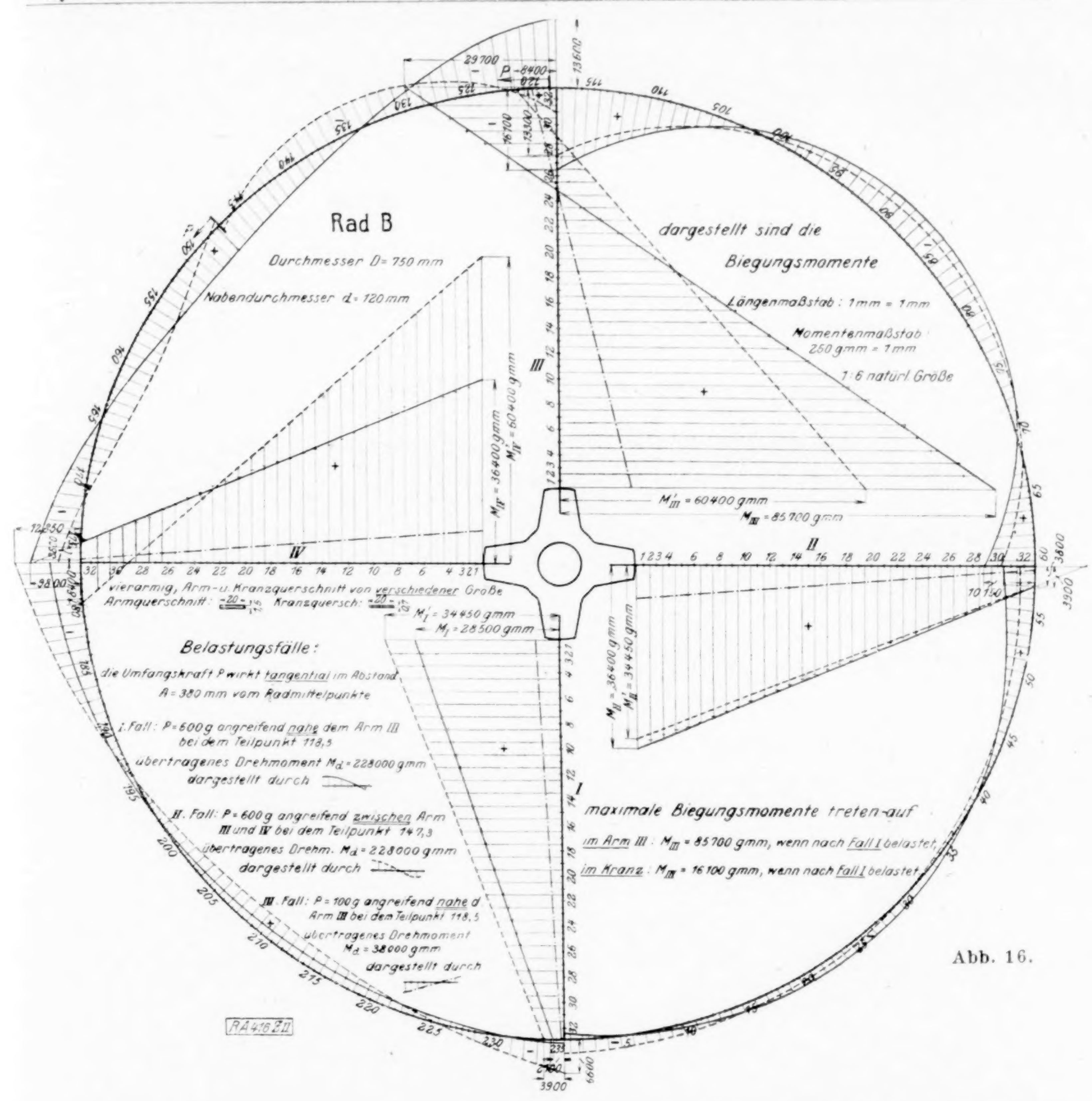


Abb. 16.

Die Bestimmung der Tangentenwinkel in zwei aufeinanderfolgenden Teilpunkten erfolgte mit einem eigens gebauten Spiegelapparat (Abb. 10). Gemessen wurden mit dieser Vorrichtung eigentlich jene Winkel, welche von den Ebenen eingeschlossen werden, die man durch die Punkte a b c d bei zwei aufeinanderfolgenden Teilstrichen legen kann. Die gemessenen Winkel gehörten also nicht den Tangentialebenen in zwei Teilpunkten an, sondern Ebenen, welche die elastische Linie in zwei von den Meßstrichen gleichweit entfernten Punkten schneiden.

Bei Berücksichtigung des Umstandes, daß die elastische Linie der Arme verhältnismäßig flach verläuft und die elastische Linie des Kranzes im großen und ganzen von der Kreisform nur wenig abweicht, können die so gemessenen Winkelwerte den von den Tangenten eingeschlossenen Winkeln gleichgesetzt werden, da die Differenz der Sehnenwinkel zweier benachbarter Punkte, wie sie sich aus der Messung mit dem Spiegelapparat ergibt, den Tangentenwinkeln gleichgesetzt werden kann. Der Spiegelapparat besteht aus einem Querstück a mit zwei Schneiden und zwei, mit ihm durch Lötung verbundenen seitlichen Platten p_1 und p_2. Teil a und die Platten p_1 p_2 mußten zwecks richtiger Ausführung der Schneiden getrennt hergestellt werden. Der Spiegelapparat wurde so aufgesetzt, daß der betreffende Teilstrich zwischen den beiden Strichmarken in dem Fenster der Platte p erschien und hierbei die Schneiden von a auf der Oberkante des Armes

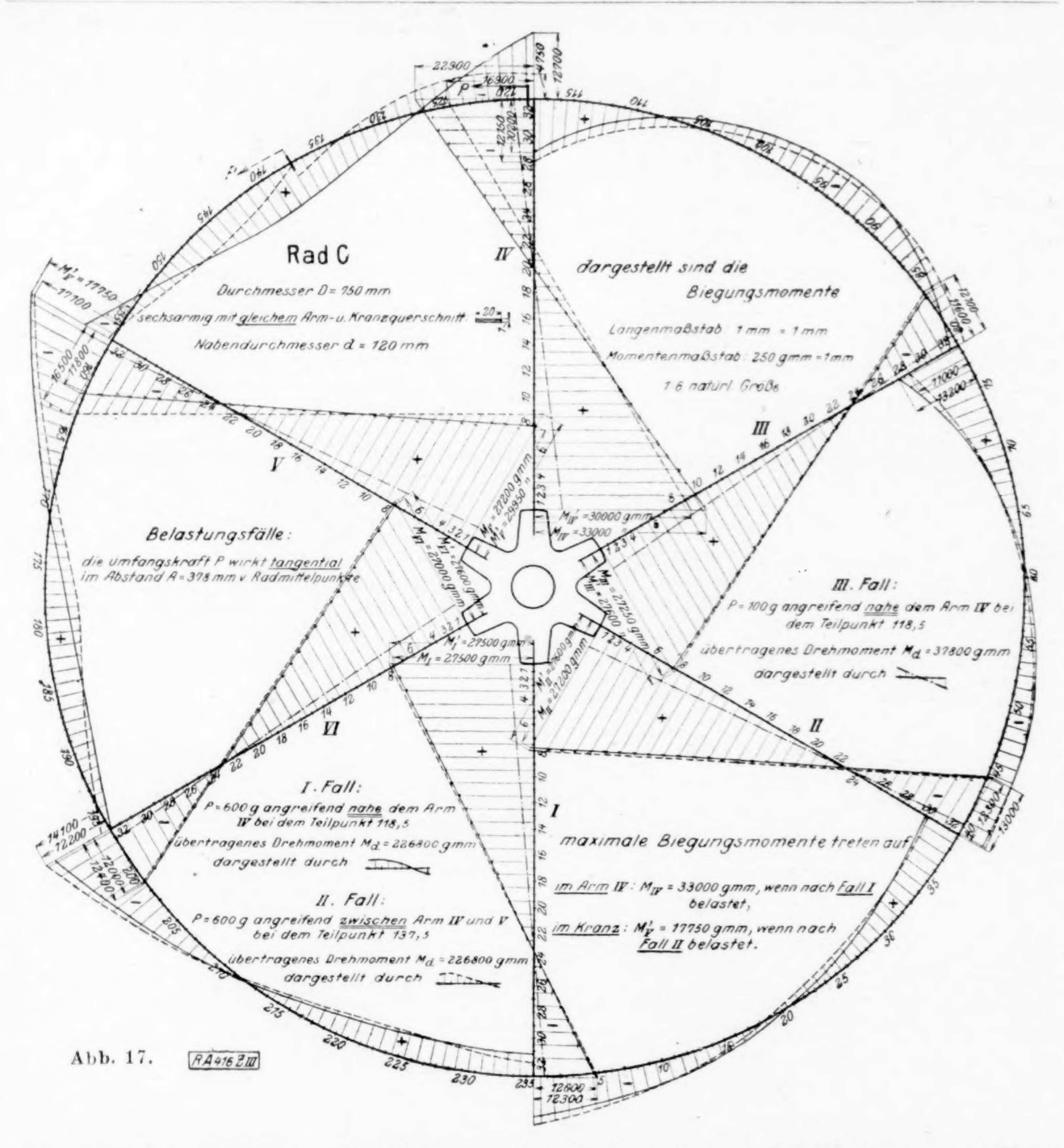


Abb. 17.

bezw. Kranzes aufruhten. Die Fixierung in dieser Stellung erfolgte durch den mittels einer Plattfeder an die betreffende Stelle angedrückten Stift o einerseits, und andererseits durch die vier ihm gegenüberliegenden Schraubenspitzen. Der Spiegelhalter c kann behufs entsprechender Einstellung sowohl um eine vertikale als auch eine horizontale Achse gedreht werden.

Das Justieren des Spiegelapparates vor seiner Verwendung erstreckte sich auf die richtige Einstellung der vier Körnerspitzen der Schrauben zur Festlegung der Punkte a b c d (Abb. 10) und Einstellung des Spiegels. Das richtige Fassen der vier Spitzen konnte beim Versuch leicht geprüft werden, da die spiegelnde Oberfläche des Versuchsmaterials einen etwa vorhandenen Zwischenraum hätte deutlich erkennen lassen. Die Ablesung erfolgte mit Hilfe eines Fernrohres, an dessen Ständer der Ablesemaßstab befestigt war.

Der Vorgang bei den einzelnen Räderversuchen war folgender: Es wurden zunächst bei dem jeweils zu untersuchenden auf dem Brett festgemachten Rade die Winkel der Tangenten in zwei aufeinanderfolgenden Meßpunkten im **unbelasteten** Zustande des Rades gemessen. Hierauf wurde jedes Rad einmal in der Nähe eines Armes (Belastungsfall I) und dann in der Mitte eines Kranzstückes (Belastungsfall II) durch eine Tangentialkraft belastet. Es erfolgte nun wiederum im belasteten Zustande die Messung der Tangentialwinkel von einem Teilstrich zum nächsten. (Versuchsanordnung Abb. 11.)

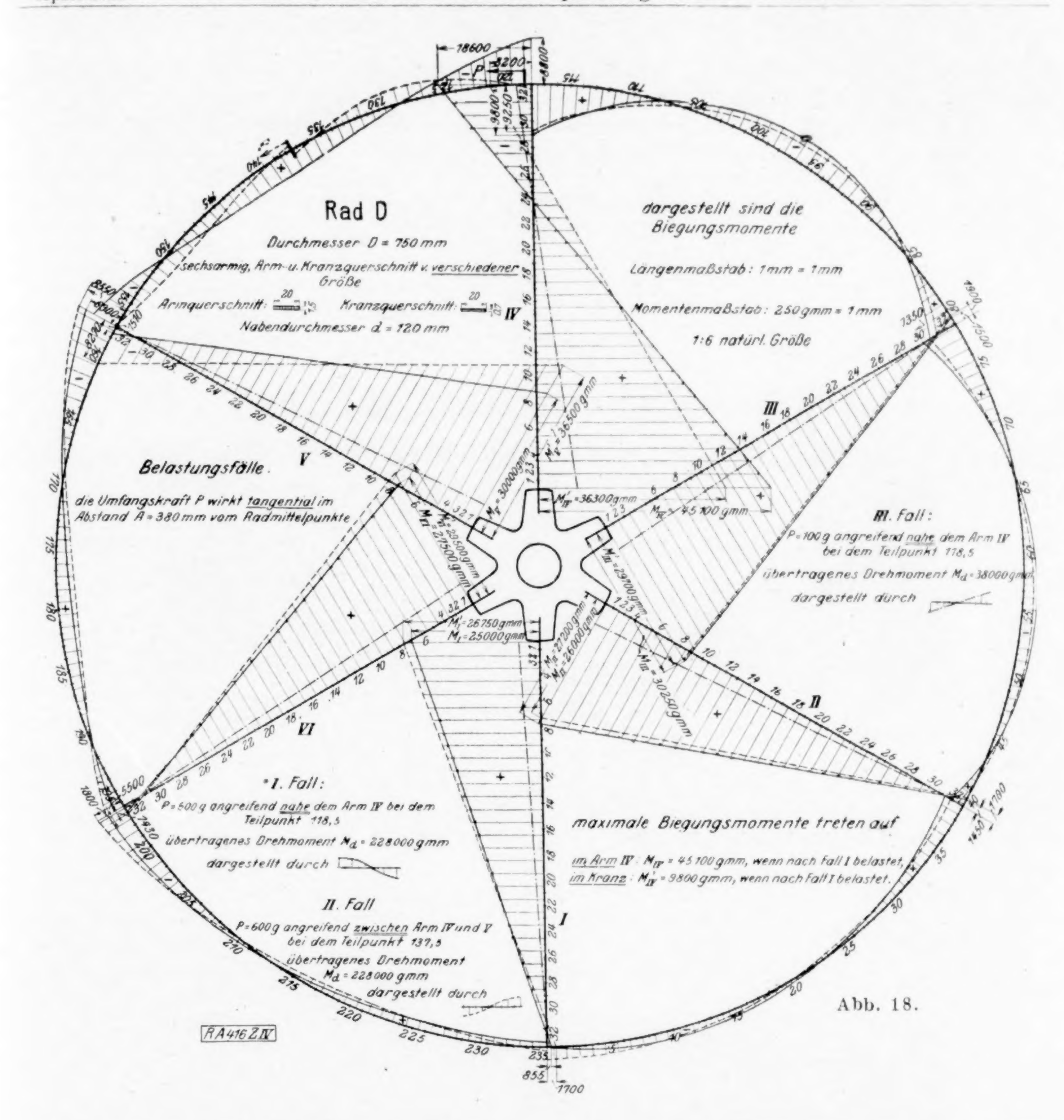


Abb. 18.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls des Versuchsmaterials erfolgte auf Grund eines den Verhältnissen angepaßten Biegeversuchs. Ein Stab $a\,b$ erhielt eine Belastung durch ein reines Kräftepaar von bekannter Größe. Vom Stab $a\,b$ war das Trägheitsmoment für einzelne Querschnitte durch genaue Messungen bekannt und der Krümmungsradius wurde wieder aus dem gemessenen Tangentenwinkel zweier aufeinanderfolgender Meßpunkte bestimmt. Die Messung der Tangentenwinkel erfolgte auf die gleiche Art wie bei den Räderversuchen. Die Größe des Elastizitätsmoduls ergab sich dann aus der Beziehung $E = \frac{M\,X^2}{2\,y\,J}$. Die Rechnung führte im Mittel zu 1990000, E wurde sodann mit 2000000 kg/cm² angenommen.

Bei der Berechnung der Biegungsmomente und der zeichnerischen Darstellung derselben mußte zunächst entschieden werden, für welche Stelle der elastischen Linie der errechnete Krümmungsradius am angenähertsten zutrifft. Es zeigte sich, daß dies ungefähr für den in der Mitte zwischen zwei Meßpunkten gelegene Punkt der Fall war. Bei der Errechnung der biegenden Momente wurde der Krümmungsradius nicht erst bestimmt, sondern die Ermittlung direkt aus der Differenz der Ablesungen durchgeführt. Ist e die halbe Ablesungsdifferenz im unbelasteten und belasteten Zustand des Rades von zwei aufeinanderfolgenden Meßpunkten der Entfernung, so ergibt sich beim Abstand A

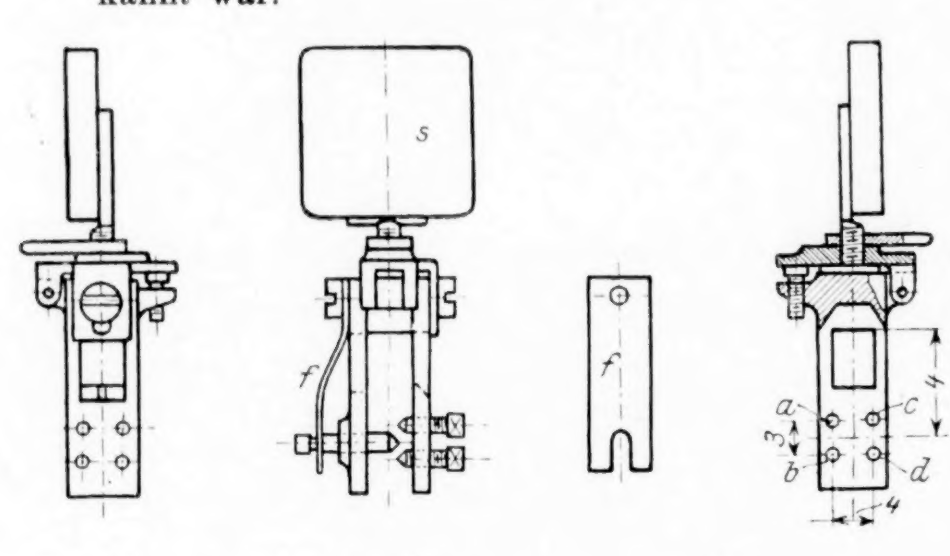
des Ablesemaßstabes das biegende Moment $M = \frac{e}{A\lambda} E \cdot J$ oder, wenn man die besonderen Werte für AJ und λ einsetzt, $\boldsymbol{M} = 500\,(2e)\,J$.

Zur Ermittlung der von jedem Arme übertragenen Drehmomente wurden die Arme in den Wendepunkten durchschnitten und die dort wirkenden Kräfte V und Z angebracht (Abb. 12). Die Gleichung der elastischen Linie jedes Armes war jetzt bekannt, nachdem die Lage des Wendepunktes und die Größe des Momentes an der Einspannstelle bekannt war.

Für die Berechnung von V und Z war es noch nötig, die senkrechten Abstände zweier Punkte der elastischen Linie des Armes V und Z zu kennen. Als diese Punkte wurden der Punkt a an der Einspannstelle und o in der Entfernung x von derselben gewählt (siehe Abb. 12). Es gelten dann die Beziehungen

$V l \pm Z r_1 = M_a$ für die Einspannstelle,

$V l' \mp Z r_1' = M_o$ für den Querschnitt in o.



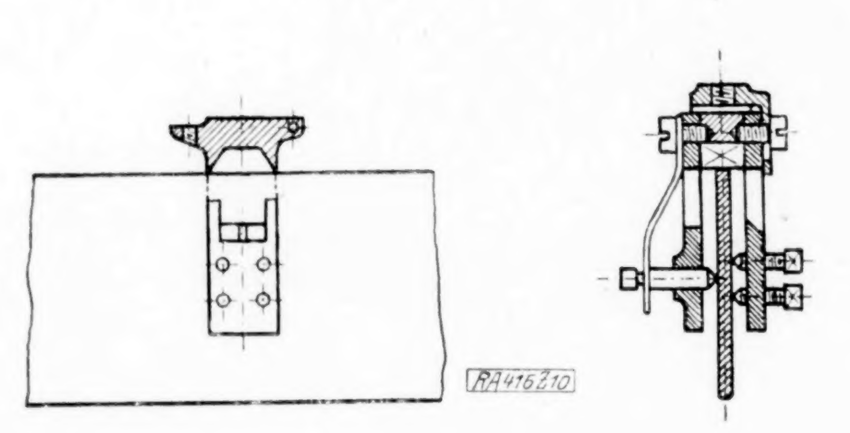


Abb. 10.

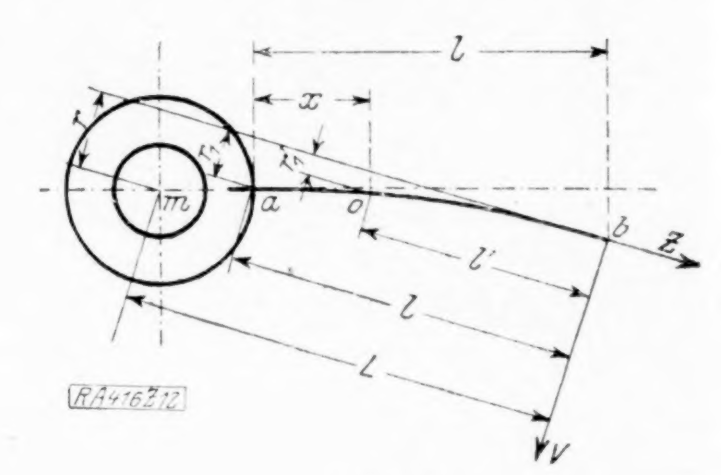


Abb. 12.

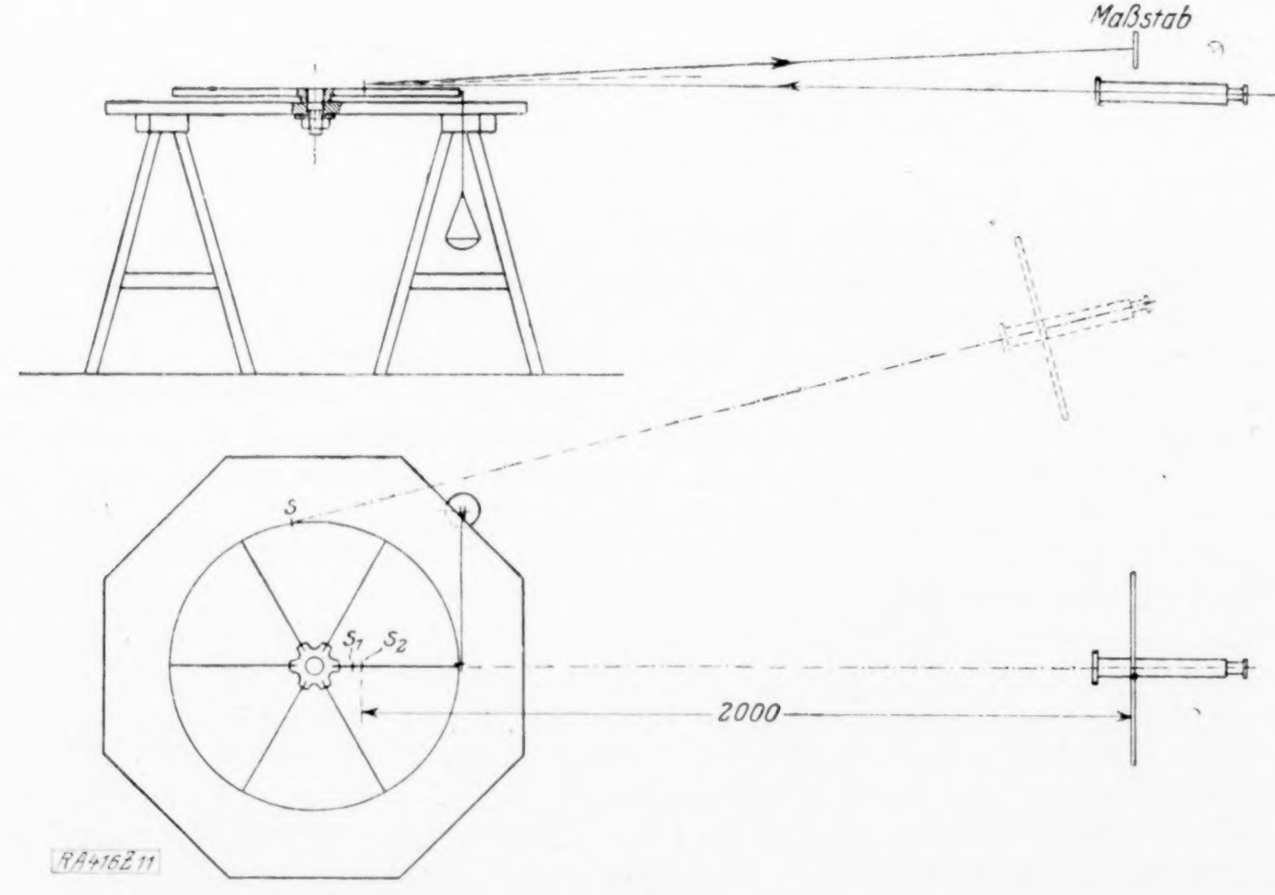


Abb. 11.

Die Abstände r, r_1, r_1' wurden, da sie bei der geringen Durchbiegung verhältnismäßig klein ausfielen, auf analytischem Wege ermittelt. Gemessen wurde in einer Zeichnung der Armmomente nur die Abszisse des Wendepunktes der elastischen Linie. Da diese Entfernung des Wendepunktes eine verhältnismäßig große Länge war (im Minimum ca. 200 mm), so hatte ein eventueller Meßfehler keinen besonderen Einfluß.

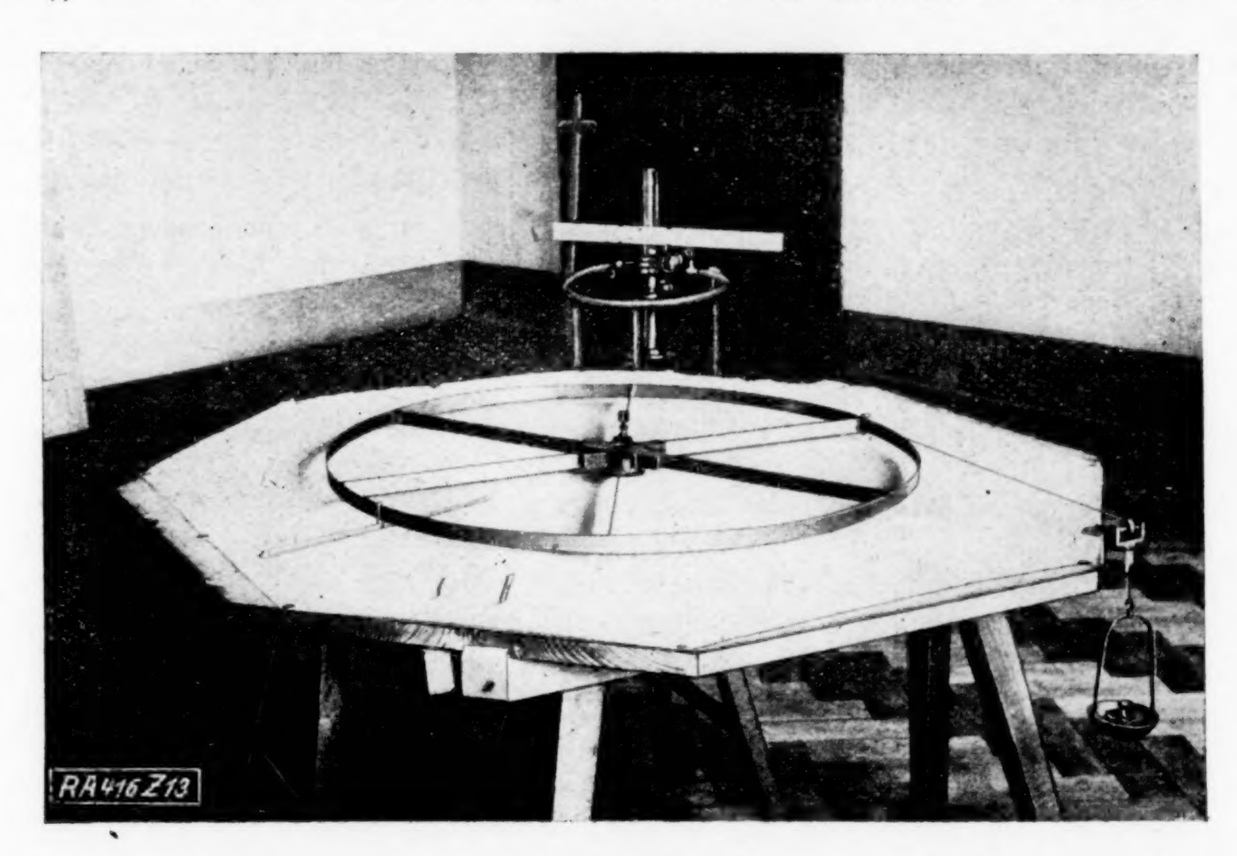


Abb. 13.

Aus der Gleichung der elastischen Linie und der nun bekannten Abszisse des Wendepunktes sowie des bekannten Momentes an der Einspannstelle ließen sich die Durchbiegungen (also die Ordinaten) in den Punkten o und b berechnen. Hierauf wurden die Gleichungen der mit den Kraftrichtungen von V und Z zusammenfallenden Geraden und deren senkrechten Abständen von den Punkten a und o bezw. m auf analytischem Wege bestimmt. Aus diesen Größen war es dann möglich, den auf einen Arm entfallenden Bruchteil des zu übertragenden Drehmomentes zu errechnen.

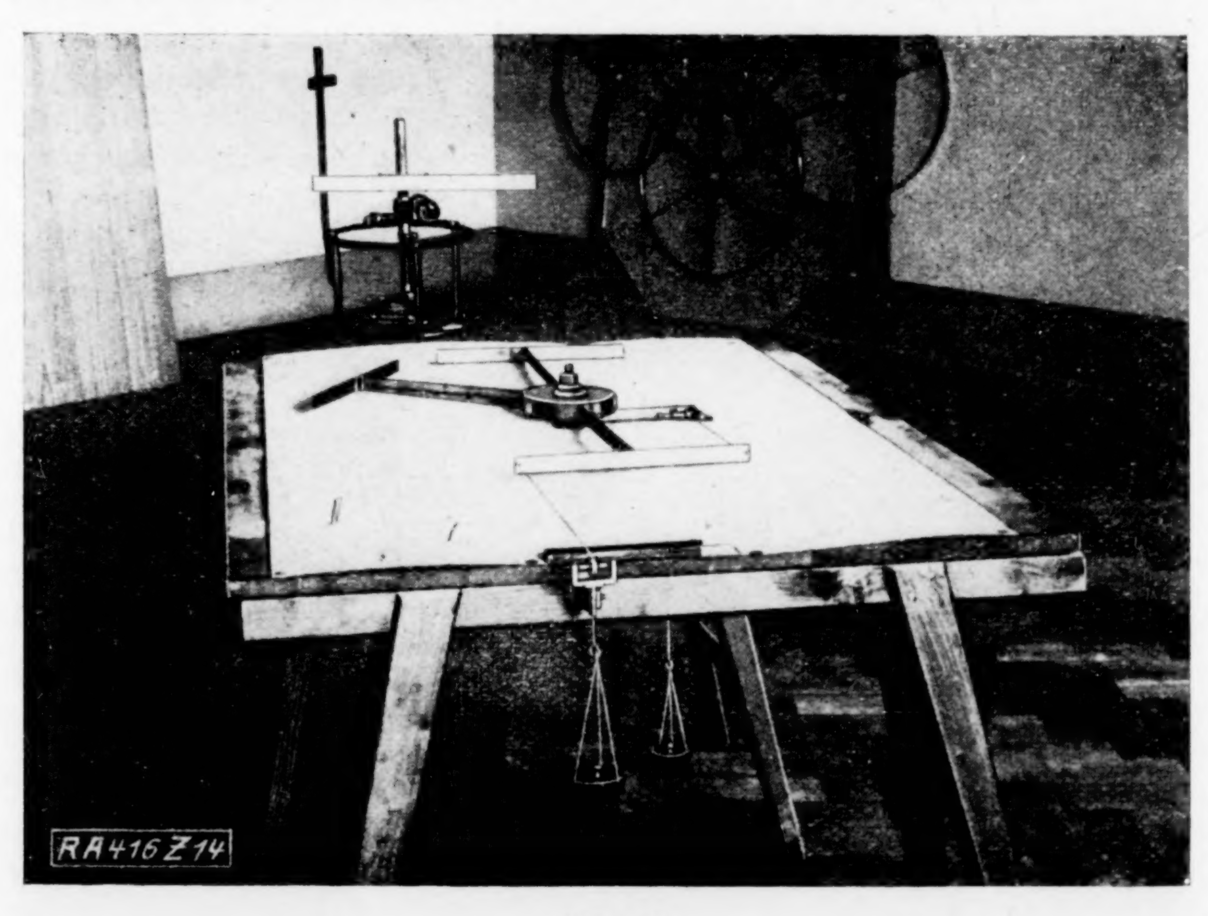


Abb. 14.

4. Versuchsergebnisse (Abb. 15 bis 18). Rad *A*. Vierarmig, Arm- und Kranzträgheitsmoment gleich. Die größte Beanspruchung ergibt sich, wenn die Umfangskraft unmittelbar bei einem Arm angreift. In diesem Falle überträgt dieser Arm 37 vH des gesamten Drehmomentes, während die übrigen Arme den Rest zu gleichen Teilen, also je 21 vH aufnehmen. Greift die Umfangskraft in der Kranzmitte zwischen zwei Armen an, dann übertragen die der Kraftangriffsstelle zunächst liegenden Arme zu gleichen Teilen je 28 vH, während die beiden anderen Arme je 22 vH übertragen. Im Kranze tritt das größte biegende Moment im zweiten Belastungsfalle auf. Es liegt in der Anschlußstelle des Kranzes an den vor der Kraftangriffsstelle liegenden Arm und es beträgt die größte Biegungsspannung im Kranze ca. 25 vH der größten Biegungsbeanspruchung im Arme.

Rad *B*. Vierarmig, Armträgheitsmoment = zehnfachem Kranzträgheitsmoment. Die größte Beanspruchung der Arme tritt dann auf, wenn die Umfangskraft bei einem Arm angreift. Dieser Arm überträgt dann ca. 48 vH des gesamten Drehmomentes, die beiderseits anschließenden Arme je ca. 19 vH und der letzte Arm den Rest. Greift die Umfangskraft in der Kranzmitte zwischen zwei Armen an, dann übertragen die der Kraftangriffsstelle zunächst liegenden Arme je ca. 32 vH, während die beiden anderen Arme je ca. 18 vH übertragen. Im Kranze tritt das größte biegende Moment ebenfalls dann auf, wenn die Umfangskraft bei einem Arm zum Angriff kommt; die größte Biegungsspannung im Kranze beträgt dann ca. 84 vH von der in den Armen vorhandenen größten Biegungsspannung.

Rad *C*. Sechsarmig, Arm- und Trägheitsmoment gleich. Die größte Beanspruchung der Arme tritt ebenfalls an der Einspannstelle dann auf, wenn die Umfangskraft bei einem Arm angreift. Dieser übernimmt dann ca. 20 vH des gesamten Drehmomentes, während die übrigen Arme den Rest zu gleichen Teilen, also je 16 vH übertragen. Rückt der Angriffspunkt der Umfangskraft in die Mitte des Kranzstückes zwischen zwei Arme, dann übertragen die dem Angriffspunkt zunächst liegenden Arme je 17,8 vH, während die übrigen Arme ca. 16,1 vH zu gleichen Teilen übernehmen. Im Kranze tritt das größte biegende Moment dann auf, wenn die Umfangskraft bei einem Arm angreift, und es ist die größte Biegungsspannung des Kranzes ca. 24 vH von jener der Arme.

Rad *D*. Sechsarmig, Armträgheitsmoment = zehnfachem Kranzträgheitsmoment. Greift bei diesem Rade die Umfangskraft unmittelbar bei einem Arme an, so überträgt dieser als der am meisten belastete ca. 25 vH des gesamten zu übertragenden Drehmomentes. Die ersten der beiderseits anschließenden Arme je 16 vH, die zweiten je 14,5 vH und der sechste Arm nur 13,33 vH. Wenn hingegen die Umfangskraft in der Mitte des Kranzsegmentes zum Angriff kommt, dann übertragen die beiden Arme dieses Segmentes je 20 vH, die ersten der nächst anschließenden je 16 vH und die restlichen zwei je 14 vH. Im Kranze tritt das größte biegende Moment in der Nähe eines Armes auf, wenn die Umfangskraft bei diesem angreift. Die größte Biegungsbeanspruchung im Kranze beträgt ca. 97 vH der größten Biegungsbeanspruchung der Arme.

Der Anteil der Normalkraft im Arm an der Uebertragung des Drehmomentes war so unbedeutend, daß der Einfluß vernachlässigt werden konnte. So beträgt z. B. beim Arm I des Rades *A* der Anteil am Drehmoment seitens der Schubkraft V im Querschnitt des Wendepunktes 30680 gmm, während auf die Normalkraft Z nur 180 gmm entfallen.

5. Schlußfolgerungen. Die mit den vier Rädern durchgeführten Versuche ergeben als allgemeines Ergebnis folgendes:

Ein Rad von der untersuchten Bauart erhält durch eine einwirkende tangentiale Umfangskraft in den Armen und im Kranz der Hauptsache nach Biegungsbeanspruchung.

Für die Arme ist die Momentenlinie eine Gerade.

In einem Arm tritt der Größtwert der Biegungsbeanspruchung immer an der Einspannstelle desselben bei der Nabe auf, und zwar als absolutes Maximum dann, wenn die Umfangskraft unmittelbar bei demselben angreift.

In den Armen hat die Biegungsbeanspruchung bei der Anschlußstelle des Kranzes einen zweiten Maximalwert.

Im Kranz eines solchen Rades tritt der Größtwert der biegenden Momente bei der Anschlußstelle eines Armes auf.

In den Armen treten außer der Biegungs- und Abscherungsbeanspruchung auch noch Beanspruchungen auf, welche sowohl durch Zug- als auch durch Druckkräfte her-

vorgerufen werden können. Doch sind die Größtwerte der durch die letztgenannten Kräfte erzeugten Spannungen sehr klein gegenüber den Maximalwerten der vorhandenen Biegungsspannungen.

Bei einer angenommenen Drehrichtung eines Rades wechseln die Größtwerte der Biegungsspannungen an der Einspannstelle der Arme das Vorzeichen nicht, sondern bleiben innerhalb zweier Grenzen mit demselben Vorzeichen.

Im Kranz wechselt bei einer Umdrehung des Rades die Biegungsspannung in der äußersten Faser in den einzelnen Querschnitten das Vorzeichen von einem Größtwert des einen Vorzeichens durch Null zu einem Werte mit dem anderen Vorzeichen.

Einfluß der Armzahl. Aus den Versuchen ersieht man, daß bei Rädern mit gleichem Verhältnis des Arm- und Kranzträgheitsmomentes, aber verschiedener Armzahl, eine gleichmäßigere Verteilung in der Uebertragung des Drehmomentes auf die einzelnen Arme bei den Rädern mit größerer Armzahl erfolgt.

Durch die Erhöhung der Armzahl von vier auf sechs wird bei zwei sonst gleichgebauten Rädern das größte an der Einspannstelle eines Armes auftretende Biegungsmoment um ca. 46 vH (von dem Maximalmoment des vierarmigen Rades) verkleinert, gleichgültig, in welchem Verhältnis das Arm- und Kranzträgheitsmoment zueinander stehen.

Macht man bei Rädern mit gleicher Armzahl das für die hier auftretende Biegungsebene in Betracht kommende Trägheitsmoment der Arme ca. zehnmal größer als jenes des Kranzes, so steigt das maximale Biegungsmoment an der Einspannstelle der Arme um ungefähr 34 vH, genommen von jenen Maximalwerten der Armbiegungsmomente, welche bei denselben Rädern mit gleichem Arm- und Kranzträgheitsmoment auftreten.

Eine Ueberdimensionierung der Arme ohne Kranzverstärkung erhöht also die auftretende Maximalbiegungsspannung in den Armen und jene im Kranze. 416

Die Stabilität rotierender achsial belasteter Wellen.[1]

Von **E. SCHWERIN** in Berlin.

In einer 1917 veröffentlichten Arbeit bestimmt Melan[2]) die kritischen Drehzahlen rotierender achsial belasteter Wellen, wie sie bei Turbokompressoren und hydraulischen Turbinen vorkommen. Da er jedoch dabei von der verkürzten Formel für den Krümmungsradius ausgeht, bei der das Quadrat der Tangentenneigung der Biegungslinie gegen die Einheit vernachlässigt wird, so entsteht besonders im Hinblick auf die Untersuchungen von v. Mises[3]) die Frage, welche Durchbiegungen insbesondere in der Nähe der kritischen Drehzahl für die längsbelasteten Wellen mit zentrisch oder exzentrisch aufgekeilter Masse sich ergeben, wenn bei Bestimmung der elastischen Linie deren genaue Gleichung zugrunde gelegt wird. Diese Frage sowie auch die von Melan überhaupt nicht untersuchte nach der Stabilität der stationären Bewegung einer solchen Welle sollen im folgenden einer näheren Betrachtung unterzogen werden.

1. Aufstellung der Grundgleichungen zur Bestimmung der Biegungslinie.

Eine an ihren Enden freigelagerte Welle (Abb. 1) aus homogenem, isotropem Material vom Elastizitätsmodul E, dem konstanten Trägheitsmoment J, der Stützweite $2\,l$ trage in der Mitte eine um das Maß e exzentrisch aufgekeilte Schwungmasse $2\,m$, außerdem sei sie durch zwei entgegengesetzt gleiche, als Druck positiv gerechnete Kräfte belastet, die ihre achsiale Richtung auch während der Deformation beibehalten mögen.

Bei Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω wird die Belastung der Welle einerseits in der Fliehkraft der Schwungmasse, andererseits in der achsialen Druck- bzw. Zugkraft bestehen. Da erstere, wenn die Durchbiegung der Wellenachse in der Mitte mit w_0 bezeichnet wird, die Größe $2\,m\,\omega^2(w_0+e)$ besitzt, wird im Punkte P der Welle das Biegungsmoment:

$$M = m\,\omega^2(w_0+e)\cdot x_1 + S\cdot y_1 \quad . \quad . \quad (1)$$

Abb. 1.

[1]) Vortrag gehalten auf der Jahresversammlung in Innsbruck 1924.
[2]) Zeitschrift des Oesterr. Ing. und Arch. Vereins 1917, Heft 44, 45.
[3]) Monatshefte für Mathematik und Physik 1911, S. 44 ff.

und zufolge der allgemeinen Biegungsgleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erhält man somit als Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -m\,\omega^2\,(w+e)\,x_1 - S \cdot y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a).$$

Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie diese verwickelte nicht lineare Differentialgleichung II. Ordnung auf eine andere, weit einfachere zurückgeführt werden kann, deren Integration auf dasselbe elliptische Integral führt, wie bei Wellen ohne Längsbelastung, jedoch mit geänderter oberer Grenze.

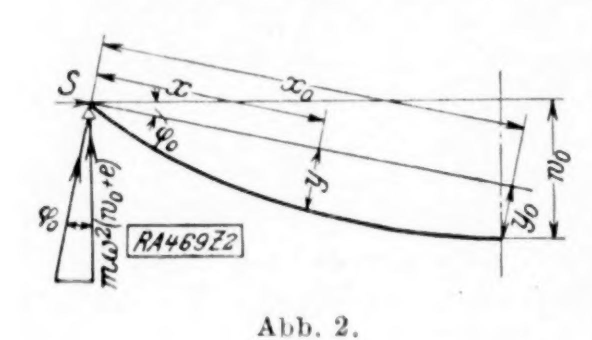


Abb. 2.

Zu diesem Zwecke beziehen wir die Koordinaten der elastischen Linie statt auf das System der Abb. 1 auf das der Abb. 2, das so gelegt ist, daß dessen y-Achse mit der Resultierenden R der am Auflager angreifenden Kräfte S und $m\,\omega^2\,(w_0+e)$ zusammenfällt. Dann lautet, da das Biegungsmoment jetzt einfach:

$$M = -R \cdot x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a)$$

wird, nach (2) die Gleichung der elastischen Linie:

$$E\,J \cdot \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -R \cdot x$$

wo:

$$R = \sqrt{S^2 + m^2\,\omega^4\,(w_0+e)^2} = \frac{S}{\sin\varphi_0} = \frac{m\,\omega^2\,(w_0+e)}{\cos\varphi_0}.$$

Durch Integration beider Seiten von (3) folgt:

$$E\,J \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = -R \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

Bezeichnen $x_0 \cdot y_0$ die Koordinaten des Wellenmittelpunktes an der Stelle der Schwungmasse, so lautet nach Abb. 2 die Bedingung zur Bestimmung der Integrationskonstanten C:

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_0} = -\sin\varphi_0$$

so daß man erhält:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{R}{2\,E\,J}\,(x_0^2 - x^2) - \sin\varphi_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Führt man nun dimensionslose Größen ein, indem man setzt:

$$\frac{R\,x_0^2}{2\,E\,J} - \sin\varphi_0 = \alpha, \qquad \beta^2 = \alpha \cdot \frac{2\,E\,J}{R\,x_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,a)$$

$$\frac{x}{x_0} \cdot \frac{1}{\beta} = \xi, \qquad \frac{y}{x_0} \cdot \frac{1}{\beta} = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,b)$$

so läßt sich (4) in der Form schreiben:

$$\frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} = \alpha\,(1-\xi^2).$$

Die Auflösung nach η' liefert:

$$\eta' = \frac{\alpha\,(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\alpha^2\,(1-\xi^2)^2}}$$

so daß:

$$\eta = \alpha \int \frac{1-\xi^2}{\sqrt{1-\alpha^2\,(1-\xi^2)^2}}\,d\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a).$$

Da für: $\xi = 0$ $\eta = 0$ und für $x = x_0$, also $\xi = 1/\beta$ $\eta = \frac{y_0}{x_0\,\beta}$ wird, so ergibt sich für die Durchbiegung y_0 in der Mitte:

$$\frac{y_0}{x_0} = \alpha\,\beta \int_0^{1/\beta} \frac{1-\xi^2}{\sqrt{1-\alpha^2\,(1-\xi^2)^2}} \cdot d\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Genau das gleiche elliptische Integral erhält man auch bei Wellen ohne Längsbelastung[1]) jedoch ist dort bei gleicher unterer Grenze 0 die obere Grenze 1, also $\beta = 1$, — was übrigens auch mit 5b) in Einklang steht, da dann $\varphi_0 = 0$, mithin: $\alpha = \frac{R x_0^2}{2 E J}$ zu denken ist — und, während dort nur ein Parameter α auftritt, ist hier noch ein weiterer β zur vollen Charakterisierung der elastischen Linie erforderlich.

Das obige elliptische Integral läßt sich nun in bekannter Weise dadurch reduzieren, daß man setzt:

$$\xi = \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \cdot \cos \varphi .$$

Dann wird:

$$\frac{y_0}{x_0} = f = \frac{1}{2 \varkappa_0 \cos \varphi} \left[F(\varkappa_0, \pi/2) - F(\varkappa_0, \varphi) + 2 \{ E(\varkappa_0, \varphi) - E(\varkappa_0, \pi/2) \} \right]$$

wo:

$$\varkappa_0 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \cos \varphi = 1/\beta \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots (7).$$

Andererseits läßt sich $\frac{y_0}{x_0}$ aber auch durch $\frac{w_0}{l}$ und φ_0 ausdrücken. Da nämlich nach Abb. 2:

$$x_0 = l \cos \varphi_0 + w_0 \sin \varphi_0 , \qquad y_0 = -l \sin \varphi_0 + w_0 \cos \varphi_0 \quad \ldots (8\,a)$$

folgt:

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{w_0/l - \operatorname{tg} \varphi_0}{1 + w_0/l \cdot \operatorname{tg} \varphi_0} \quad \ldots \ldots \ldots (8).$$

Werden daher die beiden Größen: $\gamma = \frac{S l^2}{2 E J}$, $\varkappa = \frac{m \omega^2 l^3}{2 E J}$ als gegeben betrachtet, so erhält man zur Bestimmung von α, β, w_0/l, φ_0 folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{R \cdot x_0^2}{2 E J} = \gamma \frac{(\cos \varphi_0 + w_0/l \sin \varphi_0)^2}{\sin^2 \varphi_0} \quad \ldots (9\,a), \qquad \frac{\alpha}{\beta^2}(1 - \beta^2) = \sin \varphi_0 \quad \ldots (9\,b)$$

$$\frac{w_0 + e}{l} \cdot \varkappa = \gamma \cdot \cot \varphi_0 \quad \ldots (9\,c), \qquad \frac{y_0}{x_0} = f = \frac{w_0/l - \operatorname{tg} \varphi_0}{1 + w_0/l \operatorname{tg} \varphi_0} \quad \ldots (9\,d).$$

2. Die Welle mit zentrischer Schwungmasse. Wird zunächst $e = 0$ gesetzt so folgen mit der Abkürzung:

$$1 - \beta^2 = \mu \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

aus (9a, b, c) die beiden Gleichungen für w_0/l und $\cot \varphi_0$:

$$w_0/l + \cot \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu \gamma}}, \qquad \frac{w_0/l}{\cot \varphi_0} = \gamma/\varkappa$$

woraus:

$$w_0/l = \frac{1}{\gamma + \varkappa} \sqrt{\gamma/\mu}, \qquad \cot \varphi_0 = \frac{\varkappa}{(\gamma + \varkappa) \sqrt{\mu \gamma}} \quad \ldots \ldots (11\,b).$$

Hiermit ergibt sich aus (9d) als erste Bedingungsgleichung, der die beiden Parameter α, β bezw. $\varkappa_0$, φ genügen müssen:

$$f = \sqrt{\gamma/\mu} \left[\frac{\varkappa}{(\gamma + \varkappa)^2} - \mu \right] \quad \ldots \ldots \ldots (12).$$

Eine zweite liefert (9b), wenn darin $\sin \varphi_0$ mittels (11b) durch μ und gegebene Größen ausgedrückt wird:

$$\beta^2/\alpha = \sqrt{\mu \left(\mu + \frac{\varkappa^2}{\gamma (\gamma + \varkappa)^2} \right)} \quad \ldots \ldots \ldots (13).$$

Mit Rücksicht auf die praktische Anwendung stellt es sich als zweckmäßig heraus, aus diesen beiden Gleichungen noch $\varkappa$ zu eliminieren. Man erhält dann aus (13)

$$\varkappa = \frac{\gamma}{\frac{1}{\sqrt{\gamma \left(\frac{\beta^4}{\mu \alpha^2} - \mu \right)}} - 1}$$

[1]) Vergl. Mises a. a. O.

und schließlich, wenn noch:

$$\frac{\mu}{\gamma\left(\frac{\beta^4}{\alpha^2}-\mu^2\right)}=z$$

eingeführt wird, folgende Bedingungsgleichung zwischen α, β:

$$\gamma z\left(\mu+f\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}\right)=\sqrt{z}-1 \qquad (15).$$

Für $\gamma=0$, d. h. die Welle ohne Längsbelastung, wird nach (9 d) und (11 a), da dann $\varphi_0=0$:

$$\frac{w_0}{l}=f=\frac{1}{\varkappa}\cdot\lim_{\gamma=0}\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}},$$

andererseits aus (13) für $\beta=1$: $\frac{1}{\alpha}=\lim\limits_{\gamma=0}\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}$; $\alpha=\lim\limits_{\gamma=0}\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$,

so daß in Uebereinstimmung mit v. Mises dann die Bedingungsgleichung (15) übergeht in:

$$\alpha=\varkappa\cdot f(\alpha,\beta=1) \qquad (15\,\text{a}).$$

Mittels dieser Bedingung kann nunmehr für einen bestimmten Wert γ zu jedem α bezw. $\varkappa_0$ das zugehörige β bezw. φ bestimmt und dann aus (11 b) und (14) w_0/l und $\varkappa$ gewonnen werden. Man erhält auf diese Weise je zwei zusammengehörige Werte von w_0/l und $\varkappa$, so daß nunmehr die Durchbiegung w_0/l als Funktion von $\varkappa$, d. h. der Winkelgeschwindigkeit, aufgetragen werden kann.

Führt man diese Rechnung durch, und zwar für die Werte $\gamma=+0{,}5$, $+0{,}25$, $+0{,}1$, -1, $-0{,}25$, $-0{,}5$, so ergeben sich die in der folgenden Zahlentafel zusammengestellten Werte:

$\gamma=+0{,}5$		$\gamma=+0{,}25$		$\gamma=+0{,}1$		$\gamma=-0{,}1$		$\gamma=-0{,}25$		$\gamma=-0{,}5$	
$\varkappa$	w_0/l	$\varkappa$	w_0/l	$\varkappa$	w_0/l	$\varkappa$	w_0/l	$\varkappa$	w_0/l	$\varkappa$	w_0/l
0,8965	0	1,198	0	1,385	0	1,620	0	1,800	0	2,096	0
0,862	0,164	1,179	0,0894	1,383	0,0925	1,619	0,0934	1,770	0,136	2,054	0,183
0,771	0,367	0,963	0,482	1,273	0,285	1,530	0,217	1,621	0,367	1,853	0,486
0,545	0,749	0,683	0,842	0,935	0,757	1,027	0,914	1,477	0,608	1,781	0,638

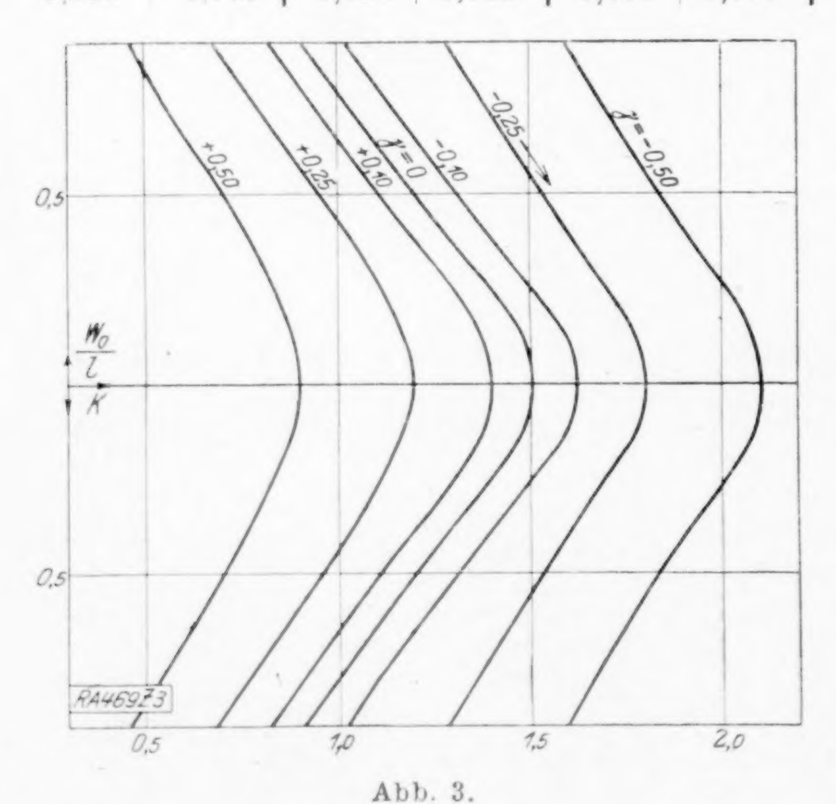


Abb. 3.

Diese Werte sind in Abb. 3 graphisch veranschaulicht, aus der man folgendes erkennt:

Der Verlauf der einzelnen Kurven ist ein ganz ähnlicher, wie bei der von v. Mises untersuchten Welle ohne Längsbelastung. Auch hier schneidet jede Kurve die $\varkappa$-Achse vertikal in einem kritischen Werte von $\varkappa$, den mit wachsendem γ, d. h. mit wachsender Druckbelastung der Welle immer weiter gegen 0 rückt, mit abnehmendem γ also mit wachsender Zugbelastung sich immer mehr von 0 entfernt; der Fall $\gamma=0$ erscheint hier deutlich als spezieller Fall der längsbelasteten Welle.

Insbesondere besteht aber ein wichtiger Unterschied zwischen der hier entwickelten genauen Theorie und der Melanschen Näherungstheorie insofern, als erstere an der Stelle der kritischen Geschwindigkeit selbst eindeutig: $w_0/l=0$ liefert, während letztere für die zentrisch belastete Welle an dieser Stelle eine unbestimmte Ausbiegung, durch die vertikale Tangente dargestellt, ergeben würde. Beide Theorien stimmen jedoch darin überein, daß oberhalb der kritischen Geschwindigkeit nur $w_0/l=0$ die Bewegungsgleichung der Welle zu befriedigen vermag.

Die kritischen Geschwindigkeiten selbst freilich sind genau die gleichen wie nach der Näherungstheorie, was sich für die längsbelastete Welle folgendermaßen nachweisen läßt:

Wie die Rechnung zeigt, entspricht bei allen Kurven für positives γ der Wert $w_0/l = 0$ dem Werte $\varkappa_0 = 0$. Für diesen wird:

$$F(\varkappa_0, \pi/2) - F(\varkappa_0, \varphi) + 2\,\{E(\varkappa_0, \varphi) - E(\varkappa_0, \pi/2)\} = \varphi - \pi/2,$$

mithin nach (15a):

$$\lim_{\varkappa_0=0} \gamma z = \lim_{\varkappa_0=0} \frac{\dfrac{1}{2\varkappa_0^2\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi}{\dfrac{1}{2\varkappa_0^2\cos^2\varphi} + \operatorname{tg}^2\varphi} \cdot \cot^2\varphi = \cot^2\varphi$$

und:

$$\lim_{\varkappa_0=0}\left(\mu + f\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}\right) = \lim_{\varkappa_0=0}\left(\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2\varkappa_0^2\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{\dfrac{1}{2\varkappa_0^2\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi}{\gamma}}\right) = \lim_{\varkappa_0=0} \frac{1 + \dfrac{\varphi - \pi/2}{\sqrt{2\gamma}}}{2\varkappa_0^2\cos^2\varphi}.$$

Dieser Grenzwert kann aber nur dann einen endlichen Wert besitzen, wie dies infolge (16) zur Befriedigung der Bedingung (15) erforderlich ist — es ist hier überall $\varphi \neq 0$ und $\neq \pi/2$ vorausgesetzt —, wenn der Zähler in (17) verschwindet, d. h. wenn

$$1 + \frac{\varphi - \pi/2}{\sqrt{2\gamma}} = 0 \qquad \text{oder:} \qquad \varphi = \pi/2 - \sqrt{2\gamma}\,.$$

Andererseits wird aber für: $\varkappa_0 = 0$

$$\lim_{\varkappa_0=0}\left(\frac{\beta^4}{\alpha^2\mu} - \mu\right) = \lim_{\varkappa_0=0}\left\{\frac{1}{(2\varkappa_0^2\cos^2\varphi)^2\left(1 + \dfrac{1}{2\varkappa_0^2\cos^2\varphi} - \dfrac{1}{\cos^2\varphi}\right)} - 1 + \frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2\varkappa_0^2\cos^2\varphi}\right\} = 2\operatorname{tg}^2\varphi.$$

so daß also für $\varkappa = 0$, $\varphi = \pi/2 - \sqrt{2\gamma}$ nach (14) der kritische Wert $\varkappa_\varkappa$ wird:

$$\varkappa_\varkappa = \lim_{\varkappa_0=0} \varkappa = \frac{\gamma}{\dfrac{1}{\sqrt{\gamma \cdot 2\operatorname{tg}^2(\pi/2 - \sqrt{2\gamma})}} - 1} = \frac{\gamma}{\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma}} - 1} \quad . \; . \; . \quad (19\text{a}).$$

Für negative Werte von γ geht dies über in:

$$\varkappa_\varkappa = \frac{|\gamma|}{1 - \dfrac{\mathfrak{Tg}\sqrt{2|\gamma|}}{\sqrt{2|\gamma|}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19\text{b}),$$

und diese Werte $\varkappa_\varkappa$ sind mit den von Melan gefundenen identisch.

Für kleine Werte von γ liefert die Reihenentwicklung von $\operatorname{tg}\sqrt{2\gamma}$ bezw. $\mathfrak{Tg}\sqrt{2|\gamma|}$ folgende Näherungswerte für (19a), (19b):

$$\varkappa_\varkappa = 1{,}5 - 1{,}2\,\gamma \qquad \text{bezw.} \qquad \varkappa_\varkappa = 1{,}5 + 1{,}2\,\gamma \quad . \; . \; . \quad (19\text{c, d}),$$

und Abb. 4 zeigt, daß diese Werte selbst noch für $\gamma = \pm 0{,}5$ eine außerordentlich gute Näherung darstellen, da die genauen Werte nach (19a), (19b) 0,895, 2,096 von den Näherungswerten nach (19c), (19d), nämlich 0,9 bezw. 2,1 nur um 0,56 vH und 0,19 vH sich unterscheiden.

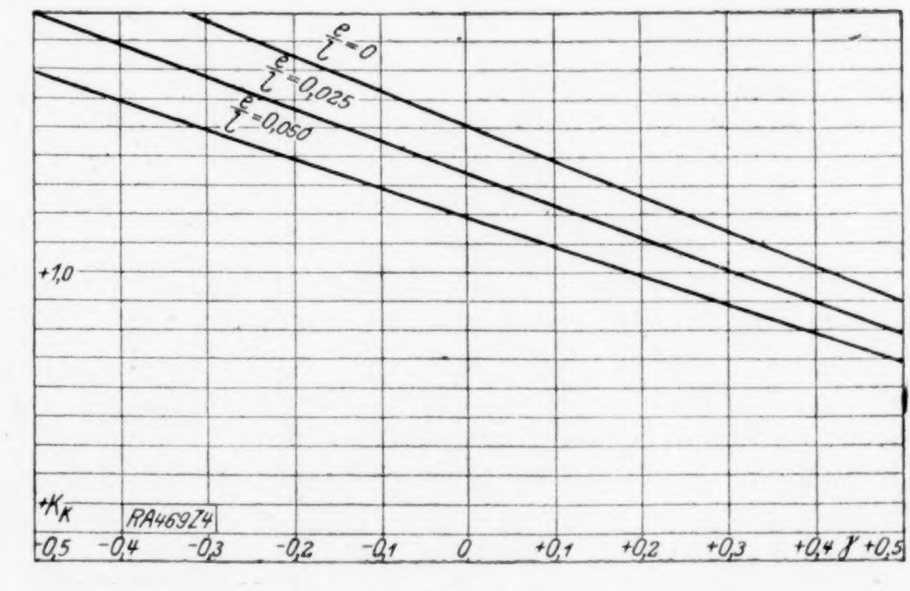


Abb. 4.

3. Die Welle mit exzentrischer Schwungmasse. Nachdem im vorstehenden die Biegungslinie der längsbelasteten Welle mit zentrischer Schwungmasse bestimmt ist, läßt sich die der Welle mit exzentrischer Schwungmasse in sehr einfacher Weise aus ersterer ableiten, und zwar folgendermaßen:

In dem zur Bestimmung der Auslenkung dienenden Gleichungssystem (9a—d) tritt $\varkappa$ und e nur in der dritten Gleichung (9c) auf; es läßt sich daher leicht übersehen, daß, wenn ein zusammengehöriges Wertepaar w_0/l und $\varkappa = \gamma \frac{\cot \varphi_0}{w_0/l}$ der Welle mit zentrischer Schwungmasse (9a—d) befriedigt, ein Wertepaar mit dem gleichen w_0/l jedoch jetzt mit:

$$\varkappa' = \varkappa \cdot \frac{w_0/l}{\frac{w_0 + e}{l}} = \varkappa \cdot \frac{1}{1 + e/w_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ebenfalls den Gleichungen (9a—d) bei vorhandener Exzentrizität e Genüge leistet.

Da nun nach Abb. 3, wenn $e = 0$, zu jedem Wert $\varkappa$ ein positiver und ein gleich großer negativer Wert w_0/l gehört, erhält man zu jedem Wert $\varkappa$ je zwei Werte $\varkappa'$, von denen der zu positivem w_0/l gehörige kleiner, der dem negativen w_0/l entsprechende größer als $\varkappa$ ist.

Auf diese Weise erhält man z. B. für: $e/l = 0{,}025$ und verschiedene Werte von γ eine Kurvenschar, die in Abb. 5 graphisch veranschaulicht ist, und man erkennt bezüglich der Auslenkungen der achsial belasteten Welle folgendes:

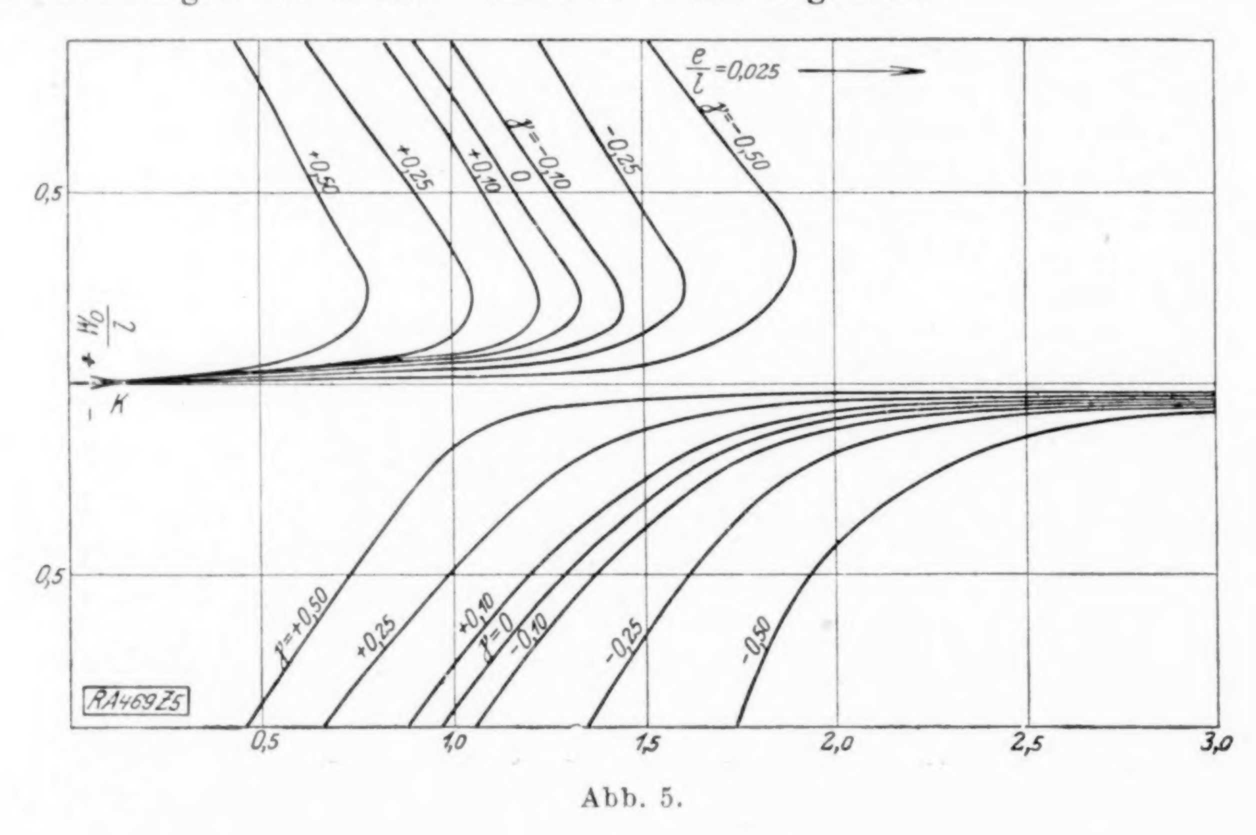


Abb. 5.

Die Kurven zeigen auch hier denselben Charakter wie für die Welle ohne Längsbelastung ($\gamma = 0$). Während die Welle mit zentrischer Schwungmasse bis zur Erreichung der kritischen Geschwindigkeit ohne irgendwelche Auslenkung sich drehen konnte, ist dies hier nicht mehr der Fall. Es wachsen vielmehr mit Vergrößerung der Drehzahl die kleinen Ausschläge stetig immer mehr an, bis zu einer Stelle — bei der Kurve $\gamma = +\,0{,}1$ z. B. die Stelle a —, wo: $\frac{d\,(w_0/l)}{d\,\varkappa} = \infty$ wird. Hier muß nach Abb. 1 ein Ueberschlagen des Massenschwerpunktes von der äußeren auf die innere Seite der Welle, und sodann bei noch weiter wachsender Drehzahl ein ständiges Abnehmen der Auslenkungen stattfinden, bis schließlich w_0/l sich immer mehr dem Grenzwert $= -\,e$ nähert, also der Schwerpunktsabstand $\frac{w_0 + e}{l} = 0$ wird, d. h. der für die Welle ohne Achsialbelastung bereits bekannte Vorgang der Selbstzentrierung bei sehr großer Drehzahl ist auch bei Längsbelastung zu erwarten, und zwar sowohl bei Zug- als auch bei Druckbelastung.

Zugleich ist aber auch aus Abb. 5 ersichtlich, daß jene kritischen Drehzahlen unter denen der Welle mit zentrischer Schwungmasse liegen, und zwar um so tiefer, je größer Druckbelastung und Exzentrizität der Welle sind. In Abb. 4 ist diese Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeiten von der Achsialbelastung veranschaulicht. Infolge des fast genau geradlinigen Verlaufes läßt sich für die praktisch vorkommenden, sehr kleinen Exzentrizitäten die Näherungsformel ableiten:

$$\varkappa_{\mathrm{x}} = 1{,}5 - 6{,}5 \cdot e/l - 4\,\gamma\,(0{,}3 - e/l)$$

und man erkennt, daß infolge des in gleicher Richtung wirkenden Einflusses größerer Exzentrizitäten und Druckbelastungen die Herabsetzung des kritischen Wertes $\varkappa_k$ beträchtlich werden kann; sie würde z. B. für $e/l = 0{,}01$ und $\gamma = +0{,}2$ bereits $\sim \frac{1{,}5 - 1{,}2}{1{,}5} \cong \frac{0{,}3}{1{,}5} \simeq 20$ vH gegenüber der achsial nicht belasteten Welle mit zentrischer Schwungmasse betragen, d. h. die kritische Drehzahl selbst würde um ~ 10 vH zurückgehen.

Untersucht man ferner die Frage, in welcher Weise die Lage der Stabilitätsgrenze durch das Hinzutreten einer Längsbelastung bei einer bestimmten Schwungmasse beeinflußt wird, so zeigt sich, daß die Stabilitätsgrenze um so höher rückt, je größer die Zugbelastung der Welle ist. Eine starke Zugbelastung wirkt offenbar in der Weise, daß sie die Welle gerade zu strecken sucht und so die Selbstzentrierung erschwert, so daß Stabilität erst nach Ueberwindung des von der Zugbelastung herrührenden Widerstandes, d. h. also erst bei höheren Drehzahlen eintreten kann, bezw. bei gleicher Lage der Stabilitätsgrenze ein größeres Massenträgheitsmoment als ohne Zugbelastung erforderlich ist.

4. Stabilität der excentrisch belasteten Welle. Nachdem in vorstehendem die Auslenkungen der achsial belasteten Welle als Funktion der Drehzahl bestimmt sind, entsteht die Frage, ob die erhaltene stationäre Rotation der Schwungmasse bei irgendeiner Winkelgeschwindigkeit stabil oder instabil ist. Um diese Frage zu beantworten, wenden wir — analog wie dies Stodola[1]) für die nicht achsial belastete Welle getan hat — das Verfahren der kleinen Schwingungen an, nach dem für irgendeine stationäre Bewegung Stabilität dann vorhanden ist, wenn irgendwelche kleinen Störungen derselben ebenfalls nur geringe, zeitlich gleichbleibende oder abnehmende, jedenfalls aber nicht anwachsende Lagen- und Geschwindigkeitsänderungen hervorrufen können. Wir behandeln zunächst die Welle mit exzentrischer Schwungmasse.

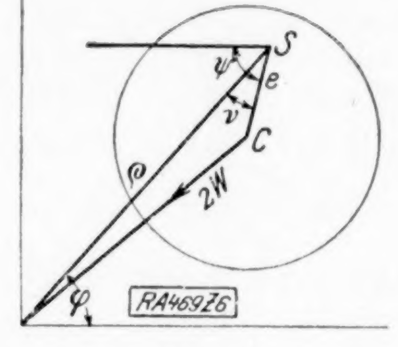


Abb. 6.

In Abb. 6 bezeichne 0 den Spurpunkt der Drehachse, C den Wellenmittelpunkt, an dem auch die elastische Rückstellkraft $2\,W$ tätig ist, S den gegen C um das Maß e exzentrisch liegenden Schwerpunkt der aufgesetzten Schwungmasse. Die drei Koordinaten des hier vorliegenden Systems von drei Freiheitsgraden seien

$$\varphi, \quad \varrho = \overline{OS} \quad \text{sowie der Winkel } \psi \text{ bezw. } v = \psi - \varphi.$$

Ist nun für die ursprüngliche stationäre Bewegung, deren Stabilität untersucht werden soll:

$$\varrho = \varrho_0 = w_0 + e, \qquad \varphi = \varphi_0 = \omega_0\, t, \qquad v = 0, \qquad \psi = \psi_0 = \varphi_0 = \omega_0\, t,$$

so lautet zunächst für die Bewegung von S in radialer Richtung unter dem Einfluß der Fliehkraft $2\,m\,\varrho\,\omega^2$ einerseits, der elastischen Rückstellkraft $2\,W$ andererseits, die Bewegungsgleichung[2]):

$$2\,m\,\ddot{\varrho} = 2\,m\,\varrho\,\dot{\varphi}^2 - 2\,W \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

Da ferner für die Drehung der Schwungmasse, deren Massenträgheitsmoment Θ sei, um den Schwerpunkt S infolge des kleinen Wertes von v das treibende Moment: $M = -2\,W \cdot e\,v$ wird, muß folgende Gleichung gelten:

$$\Theta\,\ddot{\psi} = -2\,W \cdot e \cdot v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Eine weitere Bedingung ergibt sich aus der zuerst von Stodola aufgestellten Bedingung, daß der Drall des Systems vor und nach der Störung der gleiche sein solle, nämlich:

$$2\,m\,\varrho^2\,\omega + \Theta\,\dot{\psi} = 2\,m\,\varrho_0{}^2\,\omega_0 + \Theta\,\omega_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Schließlich ergibt sich eine weitere Bedingungsgleichung daraus, daß der Abstand $\overline{OC}$ von der Größe der elastischen Rückstellkraft $2\,W$ abhängig ist. Während nach der Näherungstheorie diese Abhängigkeit in einer einfachen Proportionalität besteht, soll sie hier genauer bestimmt werden, und zwar mittels eines ähnlichen Verfahrens, wie es wohl zuerst H. Lorenz[3]) auf die Knickung gerader Stäbe angewendet hat. In Abb. 7 sei eine

[1]) Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 5. Aufl., 1922, S. 937.

[2]) Die Ableitungen nach der Zeit sind im folgenden durch Punkte über den Buchstaben gekennzeichnet.

[3]) H. Lorenz, Z. d. V. d. I. 1908, S. 827.

frei gelagerte Welle einerseits durch zwei entgegengesetzt gleiche Achsialkräfte S, andererseits durch eine gegebene Last $2\,W$ in der Mitte belastet. Dann lautet die Gleichung der zugehörigen elastischen Linie:

$$E\,J \cdot \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -W \cdot x - S \cdot y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

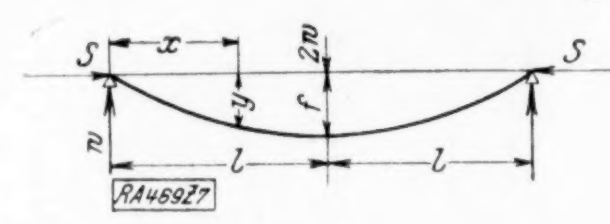


Abb. 7.

Wird nun bei Beschränkung auf hinreichend kleine Auslenkungen zunächst im Nenner der linken Seite $y' = 0$ gesetzt, so erhält man eine erste Näherung aus der bekannten Gleichung:

$$E\,J \cdot y'' = -W \cdot x - S \cdot y \qquad (24\,a)$$

unter den hier vorliegenden Grenzbedingungen in Uebereinstimmung mit Melan

$$\frac{y_0}{l} = \frac{W}{S}\left(\frac{\sin(\tau\,x/l)}{\tau \cos \tau} - \frac{x}{l}\right), \qquad \text{worin:} \quad \tau = \sqrt{2}\,\gamma = \sqrt{\frac{S\,l^2}{2\,E\,J}},$$

so daß

$$y_0' = \frac{W}{S}\left[-1 + \frac{\cos(\tau\,x/l)}{\cos \tau}\right]$$

und in der Mitte:

$$\frac{f_0}{l} = \frac{W}{S}\left(\frac{\operatorname{tg} \tau}{\tau} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,b).$$

Wird nun dieser erste Näherungswert y_0 durch Δy_0 verbessert, so muß $y_0 + \Delta y_0$ der vollständigen Gleichung (23) genügen, woraus sich für Δy_0, wenn die Wurzel binomisch entwickelt wird, folgende Bedingungsgleichung ergibt:

$$E\,J \cdot (\Delta y_0)'' + S \cdot \Delta y_0 = -{}^3/_2\, y_0'^2 (S \cdot y_0 + W \cdot x)$$

$$= -{}^3/_2 \left(\frac{W}{S}\right)^3 \frac{l \cdot \sin(\tau x/l)}{\tau \cos^3 \tau} (\cos \tau - \cos \tau x/l)^2 \qquad (25).$$

Auch von dieser inhomogenen Gleichung läßt sich das allgemeine Integral angeben; es lautet:

$$\frac{\Delta y_0}{l} = -{}^3/_2 \left(\frac{W}{S}\right)^3 \frac{\tau}{\cos^3 \tau}\left[-\frac{3 + 2\cos 2\,\tau}{8\,\tau} \cdot x/l \cos\left(\frac{\tau\,x}{l}\right) + \frac{\cos \tau}{3\,\tau^2} \cdot \sin(2\,\tau x/l) - \frac{\sin(3\,\tau\,x/l)}{32\,\tau^2}\right]$$

und liefert bei den hier vorliegenden Grenzbedingungen für die Verbesserung Δy_0 der ersten Näherung y_0 der Auslenkung in der Mitte den Wert:

$$\frac{\Delta f_0}{l} = {}^3/_2 \left(\frac{W}{S}\right)^3 \frac{1}{\cos^4 \tau}\left[\frac{3 + 2\cos 2\,\tau}{8} - \frac{\sin 4\,\tau + 28 \sin 2\,\tau}{96\,\tau}\right],$$

so daß insgesamt:

$$f = c_1\,W + c_2\,W^3,$$

worin:

$$c_1 = \frac{l^3}{E\,J} f_1(\tau) \qquad \text{und:} \qquad f_1(\tau) = \frac{\operatorname{tg} \tau - \tau}{\tau^3}$$

$$c_2 = \frac{l^7}{E^3\,J^3} f_2(\tau) \qquad\qquad f_2(\tau) = \frac{12\,(3 + 2\cos 2\,\tau) - \sin 4\,\tau - 28 \sin 2\,\tau}{64\,\tau^7 \cos^4 \tau} \qquad (26).$$

Für die nicht achsial belastete Welle würde $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ sich dem Grenzwert nähern:

$$f_1(\tau) = {}^1/_3, \qquad f_2(\tau) = {}^1/_{35}.$$

Hierdurch ist also die genauere Beziehung zwischen der Auslenkung und der elastischen Rückstellkraft nach Abb. 6 mit Rücksicht auf den kleinen Wert von ν gegeben durch:

$$\varrho_0 - e = c_1\,W + c_2\,W^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

wo c_1, c_2 sich aus (26) bestimmen.

Setzt man nun in den vier Bewegungsgleichungen (21), (22), (23), (27) des vorliegenden dynamischen Problems:

$$\varrho = \varrho_0 + e, \quad \varphi = \varphi_0 + \Delta\,\varphi_0, \quad \psi = \psi_0 + \Delta\,\psi_0, \quad \nu = \Delta\,\psi_0 - \Delta\,\varphi_0, \quad W = W_0 + \Delta\,W_0$$

worin $\Delta\,\varrho_0$ $\Delta\,\varphi_0$ $\Delta\,\psi_0$ sehr kleine Größen darstellen, deren Quadrate und Produkte vernachlässigt werden können, so erhält man mit: $\Theta = 2\,m \cdot q^2$ folgendes Gleichungssystem:

$$m \cdot \Delta\,\ddot{\varrho}_0 = \Delta\,\varrho_0 \cdot \omega_0^2 + 2\,\varrho_0 \cdot \omega_0 \cdot \Delta\,\dot{\varphi}_0 - \Delta\,W_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21\,a),$$

$$\Delta\,\ddot{\psi}_0 + \frac{W_0\,e}{m\,q^2} \cdot (\Delta\,\psi_0 - \Delta\,\varphi_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22\,a),$$

$$2\,\varrho_0\,\omega_0 \cdot \Delta\,\varrho_0 + \varrho_0^2 \cdot \Delta\,\dot{\varphi}_0 + q^2 \cdot \Delta\,\dot{\psi}_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23\,a),$$

$$\Delta\,\varrho_0 = (c_1 + 3\,c_2\,W_0^2) \cdot \Delta\,W_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,a).$$

Führt man hierin den Ansatz ein:

$$\Delta \varrho_0 = A e^{\lambda t}, \qquad \Delta \varphi_0 = B e^{\lambda t}, \qquad \Delta \psi_0 = C e^{\lambda t}, \qquad \Delta W_0 = D e^{\lambda t},$$

so ergeben sich folgende 4 Gleichungen:

$$m(\omega_0^2 - \lambda^2) A + 2 m \varrho_0 \omega_0 \lambda \cdot B \qquad\qquad - D = 0 \quad . \quad . \quad (21\,\mathbf{b}),$$

$$- \frac{W_0 \cdot e}{m \cdot q^2} \cdot B \qquad + \left(\lambda^2 + \frac{W_0 e}{m q^2}\right) \cdot C \qquad = 0 \quad . \quad . \quad (22\,\mathbf{b}),$$

$$2 \varrho_0 \omega_0 A + \varrho_0^2 \lambda \cdot B \qquad + \lambda q^2 \cdot C \qquad = 0 \quad . \quad . \quad (23\,\mathbf{b}),$$

$$A \qquad - (c_1 + 3 c_2 W_0^2) D = 0 \quad . \quad . \quad (27\,\mathbf{b}).$$

Dieses Gleichungssystem kann nur dann für A, B, C, D von Null verschiedene Werte liefern, wenn dessen Nennerdeterminante Δ verschwindet. Diese Bedingung: $\Delta = 0$ liefert, wenn zunächst $\varrho_0 \lesseqgtr 0$ vorausgesetzt wird, die Gleichung:

$$\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^4 + \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 \cdot M + N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} M &= 3 + \frac{1}{m\,\omega^2\,(c_1 + 3 c_2 W_0^2)} + \frac{e\,W_0}{m\,q^2 \cdot \omega_0^2}\left(1 + \frac{q^2}{\varrho_0^2}\right), \\ N &= \frac{e\,W_0}{m\,q^2 \cdot \omega_0^2}\left[4 + \left(1 + \frac{q^2}{\varrho_0^2}\right)\left(\frac{1}{m\,\omega_0^2\,(c_1 + 3 c_2 W_0^2)} - 1\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (28\,\mathrm{a}).$$

Die Forderung (28) kann nun nur dann zeitlich nicht anwachsende Ausschläge und Winkelgeschwindigkeiten ergeben, wenn — wie sich leicht nachweisen läßt [1] — λ^2 negativ reell, λ also rein imaginär ist. Dies bedingt, daß [2]:

$$M > 0 \quad (\mathrm{a}), \qquad N > 0 \quad (\mathrm{b}), \qquad \frac{M^2}{4} > N \quad (\mathrm{c}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Da nun:

$$W_0 = m\,\varrho_0\,\omega_0^2$$

$$m\,c_1\,\omega_0^2 = \frac{m\,l^3\,\omega_0^2}{E\,J} \cdot f_1(\tau) = 2\,\varkappa \cdot \frac{1}{2\,\varkappa_\chi} = \frac{\varkappa}{\varkappa_\chi}$$

$$3\,c_2\,m^3\,\varrho_0^2\,\omega_0^4 = \frac{3\,l^7}{E^3\,J^3} \cdot f_2(\tau) \cdot m^3\,\varrho_0^2\,\omega_0^4 = 24\left(\frac{\varrho_0}{l}\right)^2 \varkappa^3 \cdot f_2(\tau)$$

worin: $\varkappa_\chi$ die Werte (19a), (19b) bezeichnen, wird:

$$\left.\begin{aligned} M &= 3 + \frac{1}{\varkappa/\varkappa_\chi + 24\,(\varrho_0/l)^2\,\varkappa_3\,f_2(\tau)} + e/\varrho_0\,(1 + \varrho_0^2/q^2), \\ N &= \frac{e}{\varrho_0}\left[4\,\frac{\varrho_0^2}{q^2} + \left(1 + \frac{\varrho_0^2}{q^2}\right)\left(-1 + \frac{1}{\varkappa/\varkappa_\chi + 24\,(\varrho_0/l)^2\,\varkappa^3 \cdot f_2(\tau)}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (30).$$

Auf Grund von (30) soll nun für jeden der beiden Zweige, die in Abb. 4 zu einem bestimmten Wert von γ gehören, die Stabilität getrennt untersucht werden.

Für den oberen Zweig mit positivem $\frac{e}{\varrho_0} = \frac{e}{W_0 + e}$ ist die Forderung $M > 0$, da M dann eine Summe von nur positiven Größen ohne weiteres erfüllt. Aber auch den beiden anderen Kriterien wird genügt, da nach der in untenstehender Zahlentafel für einige Punkte durchgeführten Zahlenrechnung der Nenner: $\varkappa/\varkappa_\chi + 24\,(\varrho_0/l)^2\,\varkappa^3 f_2(\tau)$ stets kleiner als 1 bleibt und auch $M^2/4$ bei den praktisch nur in Betracht kommenden kleinen Werten von ϱ_0^2/q^2 den Wert N beträchtlich überwiegt. Es ergibt sich also für den oberen Zweig eine Stabilität der stationären Bewegung:

γ	$\varkappa_\chi$	$f_2(\tau)$	$\varkappa_I$	$\varkappa_{II}$	$\frac{w_0}{l}$	$\frac{\varkappa_I}{\varkappa_\chi} + 24\left(\frac{\varrho_0}{l}\right)^2 f_2(\tau)\varkappa^3$	$\frac{\varkappa_{II}}{\varkappa_\chi} + 24\left(\frac{\varrho_0}{l}\right)^2 f_2(\tau)\varkappa^3$	$-1 + \frac{1}{\frac{\varkappa_I}{\varkappa_\chi} + 24\left(\frac{\varrho_0}{l}\right)^2 f_2(\tau)\varkappa^3}$	$-1 + \frac{1}{\frac{\varkappa_{II}}{\varkappa_\chi} + 24\left(\frac{\varrho_0}{l}\right)^2 f_2(\tau)\varkappa^3}$
0,5	0,8965	0,241	0,751	1,020	±0,164	0,926	1,257	0,0802	— 0,2045
0,25	1,1980	0,0714	0,918	1,630	±0,0894	0,783	1,392	0,277	— 0,281
0,1	1,385	0,0758	1,089	1,895	±0,0925	0,819	1,425	0,221	— 0,2985
—0,1	1,620	0,0188	1,277	2,210	±0,0934	0,801	1,388	0,248	— 0,279
—0,25	1,800	0,0135	1,495	2,167	±0,136	0,859	1,245	0,164	— 0,1965
—0,5	2,096	0,00703	1,807	2,379	±0,183	0,906	1,1915	0,104	— 0,161

[1] Vergl. z. B. Stodola, Dampfturbinen 5. Aufl., S. 939.

[2] Routh, Dynamik II. § 289.

Für den hinteren Zweig hingegen, für den e/ϱ_0 negativ ist, zeigt die Zahlenrechnung an Hand von vorstehender Zahlentafel, daß die zweite Forderung $N > 0$ maßgebend ist. Dies verlangt nach (30), daß

$$4\,\varrho_0{}^2/q^2 + (1 + \varrho_0{}^2/q^2)\left(-1 + \frac{1}{\varkappa_{II}/\varkappa_{\mathrm{x}} + 24\,(\varrho^0/l)^2\,\varkappa^3\,f_2(\tau)}\right) > 0$$

oder:

$$q^2/\varrho_0{}^2 > -1 + \frac{4}{1 - \dfrac{1}{\varkappa_{II}/\varkappa_{\mathrm{x}} + 24\,(\varrho_0/l)^2\,f_2(\tau)\,\varkappa^3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Die hiernach sich ergebenden Werte von $q^2/\varrho_0{}^2$ und $q^2/l^2 = q^2/\varrho_0{}^2 \cdot \varrho_0{}^2/l^2$ sind in der folgenden Zahlentafel für die in obiger Zahlentafel angegebenen Punkte berechnet.

γ	$\dfrac{\varkappa_{II}}{\varkappa_{\mathrm{x}}}$	$\dfrac{w_0}{l}$	$\dfrac{q^2}{\varrho_0{}^2}$	$\dfrac{q^2}{l^2}$	$\left[\dfrac{\varkappa_{II}}{\varkappa_{\mathrm{x}}}\right]$
0,5	1,138	− 0,164	18,60	0,360	1,200
0,25	1,369	− 0,0894	13,22	0,0549	1,393
0,1	1,368	− 0,0925	12,42	0,0566	1,388
− 0,1	1,365	− 0,0934	13,35	0,0624	1,374
− 0,25	1,204	− 0,136	19,35	0,239	1,231
− 0,5	1,135	− 0,183	23,90	0,596	1,172

Es zeigt sich also, daß hier ganz wie bei der Welle ohne Längsbelastung nach Ueberschreitung der kritischen Drehzahl zunächst Instabilität besteht und bei weiterer wachsender Winkelgeschwindigkeit die Bewegung von einer bestimmten Stabilitätsgrenze ab stabil wird, die wesentlich von der Größe des Trägheitsmoments der Schwungmasse abhängt und um so höher liegt, je kleiner letzteres ist. Ist jene Stabilitätsgrenze überschritten, so läuft die Welle immer ruhiger und nähert sich dem als Selbstzentrierung bekannten Zustande.

Die Werte von $\varkappa_{II}/\varkappa_{\mathrm{x}}$, von denen ab Stabilität besteht, können für die in obiger Zahlentafel angegebenen Werte von q^2/l^2 bei bestimmter Längsbelastung direkt entnommen werden. Zugleich sind in dieser Zahlentafel auch die Werte $[\varkappa_{II}/\varkappa_{\mathrm{x}}]$ berechnet, welche sich für die gleichen Werte von q^2/l^2 nach der Näherungstheorie ergeben, die von Pöschl[1]) entwickelt wurde und für die Stabilitätsgrenze den Wert liefert: $[\varkappa_{II}/\varkappa_{\mathrm{x}}] = 1 + \delta$ wo δ aus der kubischen Gleichung zu bestimmen ist;

$$\delta^3 - \frac{3\,e^2}{q^2}\,\delta - \frac{4\,e^2}{q^2} = 0\,.$$

Der Vergleich von $\varkappa_{II}/\varkappa_{\mathrm{x}}$ und $[\varkappa_{II}/\varkappa_{\mathrm{x}}]$ zeigt, daß erstere durchweg kleiner als letztere sind: durch das Zugrundelegen der genauen elastischen Linie wird also bei einem bestimmten Trägheitsmoment der Schwungmasse die Stabilitätsgrenze nach unten verschoben bezw. würde bei festgehalten gedachter Stabilitätsgrenze schon ein geringeres Trägheitsmoment als das nach der Näherungstheorie erhaltene genügen.

5. Stabilität der zentrisch belasteten Welle. Für die zentrisch belastete Welle ($e = 0$) geht die Nennerdeterminante des Gleichungssystems (21 b), (22 b), (23 b), (27 b) überein:

$$\begin{vmatrix} m\,(c_1 + 3\,c_2\,W_0{}^2)\,(\omega_0{}^2 - \lambda^2) - 1\,, & 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\lambda\,m\,(c_1 + 3\,c_2\,W_0{}^2) \\ 2\,\varrho_0\,\omega_0 & \varrho_0{}^2\,\lambda \end{vmatrix}$$

woraus, wofern: $\varrho_0 \lesseqgtr 0$

$$-\lambda^2 = 3\,\omega_0{}^2 + \frac{1}{m\,(c_1 + 3\,c_2\,W_0{}^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Es ist also für die die $\varkappa$-Achse vertikal schneidenden Kurven der Abb. 3 in derem ganzem Verlauf Stabilität vorhanden.

Ist jedoch $\varrho_0 = 0$, so versagt die Methode der kleinen Schwingungen. Man kann indes auf Grund des Bryan-Loveschen[2]) Kriteriums, — daß eine Gleichgewichtslage, die die einzig mögliche bei der betrachteten Belastung ist, immer stabil sein muß, — schließen, daß für überkritische Drehzahlen Stabilität besteht. Für das unterkritische Gebiet versagt zwar auch dieses Kriterium; da jedoch praktisch stets eine, wenn auch sehr kleine Exzentrizität vorhanden sein wird, läuft nach **4.** auch hier die Welle praktisch stabil.

[1]) Schweizer Bauzeitung, Bd. 80, 1922, S. 22.

[2]) A. E. H. Love, Elasticity, II B. Cambridge 1893, S. 289 und G. H. Bryan, Cambr. Phil. Soc. Proceedings 6 (1889) S. 199.

Zusammenfassung. Die vorstehende, auf die genauere elastische Linie sich stützende Untersuchung der frei gelagerten, längsbelasteten Welle zeigt, daß diese sich qualitativ ganz ähnlich wie die Welle ohne Längsbelastung verhält, daß jedoch quantitativ durch die Längsbelastung eine Verschiebung der kritischen Drehzahlen — bei Druck nach unten, bei Zug nach oben — eintritt. Während für die zentrisch belastete Welle diese Verschiebung nach der genauen Theorie sich ebenso wie nach der Näherungstheorie ergibt, erhält man nach ersterer für die exzentrisch belastete Welle niedrigere kritische Drehzahlen als nach letzterer. Auch bezüglich der Lage der Stabilitätsgrenze liefern beide Theorien verschiedene Ergebnisse und zwar ergibt erstere für ein bestimmtes Massenträgheitsmoment der aufgesetzten Schwungmasse tiefer liegende Stabilitätsgrenzen als letztere, bezw. bei gleicher Stabilitätsgrenze kleinere Massenträgheitsmomente.

Außerdem zeigt sich, daß die Stabilitätsgrenze unter sonst gleichen Umständen um so höher rückt, bezw. bei festgehalten gedachter Stabilitätsgrenze ein um so größeres Massenträgheitsmoment erforderlich ist, je größer die Zugbelastung der Welle ist — eine Erscheinung, die offenbar darin ihren Grund hat, daß eine starke Zugbelastung die freie Selbstzentrierung behindert und Stabilität erst bei höheren Drehzahlen zustande kommen läßt. 469

Zur Theorie und Praxis des Englerschen Viskosimeters.

Von **HERBERT KIRSTEN** und **LUDWIG SCHILLER.**[1]

1. Das Englersche Viskosimeter ist ein in der Technik sehr gebräuchlicher Apparat zur Bestimmung der Zähigkeit von Flüssigkeiten, insbesondere von Schmierölen. Seine Form und hauptsächlichen Abmessungen (in mm), welch letztere bei den verschiedenen Exemplaren etwas, aber wenig, variieren, zeigt Abb. 1. Die eingezeichneten Maße entsprechen genau (nach einem Prüfschein der physikalisch-technischen Reichsanstalt) dem von uns benützten Apparat, der uns dankenswerter Weise von der Firma Sommer & Runge, Berlin, zur Verfügung gestellt wurde. Die lichte Weite des Ausflußröhrchens betrug 2,865 mm.

Das Englersche Viskosimeter gestattet nicht unmittelbar, absolute Zähigkeiten zu bestimmen. Es ist vielmehr üblich, damit »Englergrade« zu messen, d. h. das Verhältnis der Ausflußzeit für ein gegebenes Volumen des zu bestimmenden Stoffes (200 ccm) zu der eines gleichen Volumens Wasser von 20° C. Diese Bestimmungsart hat nicht völlig befriedigt, so daß aus technischen Kreisen immer wieder der Wunsch auftauchte nach einem Weg, mit dem Englerapparat, der gewisse praktische Vorzüge aufweist, doch auch absolute Zähigkeiten bestimmen zu können. Dieser Wunsch ist um so berechtigter, als im englischen Sprachgebiet ähnliche Apparate mit abweichenden Maßen gebräuchlich sind, die dann analog »Redwood-, Nobel-, Saybold-Grade« liefern, die untereinander und gegen die »Engler-Grade« beträchtlich differieren.

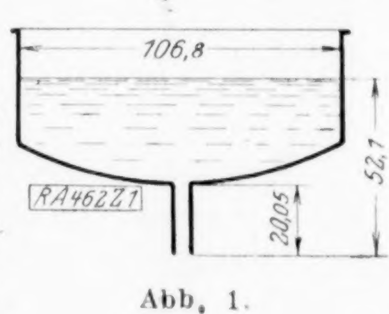


Abb. 1.

Eine Theorie des Engler-Apparates hat erstmalig v. Mises[2]) angegeben. Als ihr praktisches Ergebnis erscheint eine Formel, die gestattet, aus »Englergraden« absolute Zähigkeiten zu berechnen. Der praktische Wert dieser Misesschen Umrechnungsformel wurde durch L. Gümbel[3]) in Frage gestellt, da sie mit einer empirischen von Ubbelohde nicht übereinstimmt. Der eine von uns [Sch.[4])] hat darauf hingewiesen[5]), daß die Misessche Theorie in einem Punkt zu ändern ist. Es darf nämlich wegen der Abmessungen des Apparates nicht einfach die volle Hagenbachsche Korrektur der lebendigen Kraft in Rechnung gesetzt werden, sondern jeweils ein aus der Theorie der laminaren Anlaufströmung folgender Betrag, insbesondere für Wasser.

2. In merkwürdigem Gegensatz zur Bewährung der Anlauftheorie in anderen Fällen stand nun die Tatsache[6]), daß die Misessche Theorie für dessen Apparat eine

[1]) Vorgetragen auf der 88. Naturforscherversammlung in Innsbruck am 24. 9. 24. durch L. Schiller.
[2]) R. v. Mises, Phys. Z. 12, 812, (1911).
[3]) L. Gümbel, Z. f. techn. Phys. 2, 172, (1921).
[4]) »Sch.« bedeutet im folgenden stets den einen Verfasser.
[5]) L. Schiller, Forschungsarb. d. V. d. Ing. Heft 248, 28, 1922.
[6]) L. Schiller, Forschungsarb. d. V. d. Ing., Heft 248, S. 29, Fußn. 23, 1922.

sehr gute Uebereinstimmung zwischen theoretischer und experimenteller Ausflußzeit ergab, während die abgeänderte Berechnung nach der Sch.-schen Theorie der Anlaufströmung zu einem wesentlich abweichenden Ergebnis führte, nämlich einen um 5 vH niedrigeren Wert der Ausflußzeit als der Versuch lieferte. Der Grund hierfür wurde darin vermutet, daß außer den in Rechnung gesetzten Druckverlusten (Anlaufverlust, Reibungsverlust) noch ein weiterer in Kontraktion und Wirbelbildung zu suchen ist, der in beiden Rechnungen nicht berücksichtigt wurde und das Resultat zu gunsten der Misesschen Rechnungsweise verschob.

3. Die Richtigkeit dieser Vermutung näher zu prüfen und gleichzeitig Grundlagen zu schaffen, um wirklich Zähigkeiten aus Englergraden zu errechnen, war das Ziel vorliegender Untersuchung. War wirklich Kontraktion, bezw. Ablösung und Wirbelbildung, die Ursache der Diskrepanz, so mußte sie durch geeignete Abrundung des Einlaufstücks beseitigt werden können. Daß die Vermutung richtig war, bewiesen bereits qualitativ Vorversuche mit handmodellierten Trichtern aus Wachs, die eine Verringerung der Ausflußzeit bewirkten.

Um eine, wenigstens genäherte, quantitative Erfassung zu ermöglichen, mußte dem Einlaufstück eine Form gegeben werden, deren Widerstand rechnerisch zu erfassen ist. Als solche wurde ein parabolisches Profil gewählt, wie in Abb. 2 und 3 ersichtlich. Das

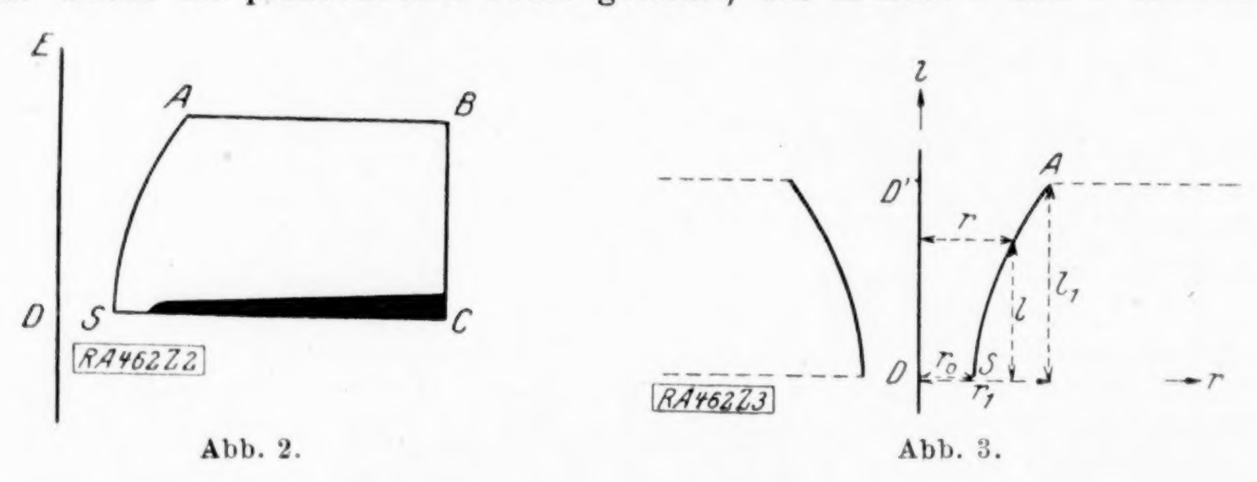


Abb. 2. Abb. 3.

Parabelstück wurde sorgfältig auf einen Drehstahl übertragen. Mit diesem ward aus einer Messingscheibe ein Trichter herausgearbeitet, dessen kleinster Kreis als Radius den des Ausflußröhrchens hatte. Es war (Abb. 3) $DS = r_0 = 0{,}14325$ cm = dem Radius des Ausflußröhrchens, $D'A = r_1 = 3{,}3$ mm, $DD' = l_1$ = der Dicke der Messingscheibe = 5,059 mm. Abb. 2 zeigt in der schwarzen Fläche noch eine Ausfräsung, die mit Befestigungsmaterial (Pizëin) ausgefüllt wurde.

4. Sieht man zur Berechnung des Widerstandes des Einlaufstückes zunächst von dem Beschleunigungsverlust ab, dem — genähert — hinterher durch die Theorie der Anlaufströmung noch Rechnung getragen wird, so können wir den Widerstand des Einlaufstückes gleichsetzen dem einer Summe von Rohrelementen vom weitesten bis zum engsten Querschnitt. Im Sinn des Poiseuilleschen Gesetzes handelt es sich dann um die Bestimmung des Integrals:

$$W = \int_0^{l_1} \frac{d\,l}{r^4} \quad \text{oder mit (vgl. Abb. 3):} \quad r = (r_1 - r_0)\frac{l}{l_1{}^2} + r_0$$

wird:

$$W = \frac{l_1{}^4}{(r_1 - r_0)^2} \int_0^{l_1} \frac{d\,l}{(m + l^2)^2}, \qquad \text{wo } m = \frac{l_1{}^2\, r_0}{r_1 - r_0}.$$

Die Integration ergibt:

$$W = \frac{l_1}{2\, r_0\,(r_0 + r_1)} + \frac{l_1}{2\, r_0\,(r_1 - r_0)} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_0}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_0}}.$$

Mit $r_0 = 0{,}14325$, $r_1 = 0{,}33$, $l_1 = 0{,}5059$ cm erhält man:

$W = 12{,}959 \left[\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}\right]$, d. h. 12,959 cm als äquivalente Länge bei 1 cm Radius oder als im Widerstand dem Trichter äquivalente Röhrchenlänge von 0,14325 cm Radius 0,26593 cm; also ist die effektive Gesamtlänge 2,005 cm + 0,26593 cm = 2,27093 cm.

5. Wie man für den Englerschen Apparat den laminaren Anlaufverlust zweckmäßig berechnet, ist bei Sch. l. c.[1]) angegeben.

Für den Apparat ohne Abrundung erhält man so für den Beginn der Ausströmung als Faktor der lebendigen Kraft $\varkappa = 1{,}635$, für das Ende $\varkappa = 1{,}717$ (statt 2 bei Hagenbach); im Mittel[2]) 1,676. Dies gibt als Ausflußzeit $t = 48{,}51$ sec; $\varkappa = 2$ (Mises) gibt $t = 52{,}67$ sec, das Experiment 51,40 sec.

Für den Apparat mit Abrundung erhält man bei Berücksichtigung obiger äquivalenter Röhrchenlänge: für $\varkappa = 1{,}7115$: $t = 49{,}41$ sec, mit $\varkappa = 2{,}0$: $t = 53{,}11$ sec, im Experiment $t = 49{,}79$ sec (im Mittel aus 9 Versuchen).

Da sonach die Differenz zwischen Theorie und Versuch jetzt unter 1 vH liegt, ist der Beweis geliefert, daß die Anlauftheorie auch beim Engler gute Resultate gibt, und gleichzeitig die Möglichkeit gegeben, mit ihm zuverlässige Bestimmungen absoluter Zähigkeiten auszuführen.

Erwähnt sei noch, daß das Wegnehmen der obersten scharfen Kante am Einlauf, das auf den äquivalenten Widerstand kaum noch von Einfluß ist, noch eine weitere Annäherung zwischen Versuch und Theorie herbeiführte ($t_{\text{exp}} = 49{,}61$ sec).

6. Um die vorliegenden Ergebnisse praktisch auszuwerten, erscheint es zweckmäßig, Kurventafeln aufzustellen, etwa für Kurven gleicher Zähigkeit als Funktion von Ausflußzeit und Dichte. Den exakten Weg hierfür hat Sch.[3]) l. c. bereits angegeben. Es hat sich jedoch gezeigt, daß man in einem Fall, in dem die strenge Methode durchgeführt wurde, nach fünfmaliger graphischer Integration mittels Polarplanimeters den Wert 49,31 sec als Ausflußzeit erhielt gegenüber einem, wie oben erhaltenen, Näherungswert von 49,41 sec. Es genügt also das einfachere Verfahren. Abb. 4 und 5 zeigen einen Entwurf einer solchen Tafel.

Zur Prüfung der Methode in dieser Form wurde zunächst nach der Kapillarmethode (d. h. mit einem längeren Rohr) die Zähigkeit eines leichtflüssigen (Spindel-) Oeles (Englergrad 6,8) bestimmt. Sie ergab sich zu $\mu = 0{,}465$, seine Dichte $\varrho = 0{,}896$. Dann wurde die Ausflußzeit des Oeles auf dem »abgerundeten« Engler zu 375 sec (Mittel aus 5 Versuchen) gemessen. In Abb. 4 findet sich so der Punkt P; dem entspricht $\mu = 0{,}471$. Fehler: 1,3 vH.

Um die jetzige Verwendungsfähigkeit auch für wenig zähe Flüssigkeiten zu er-

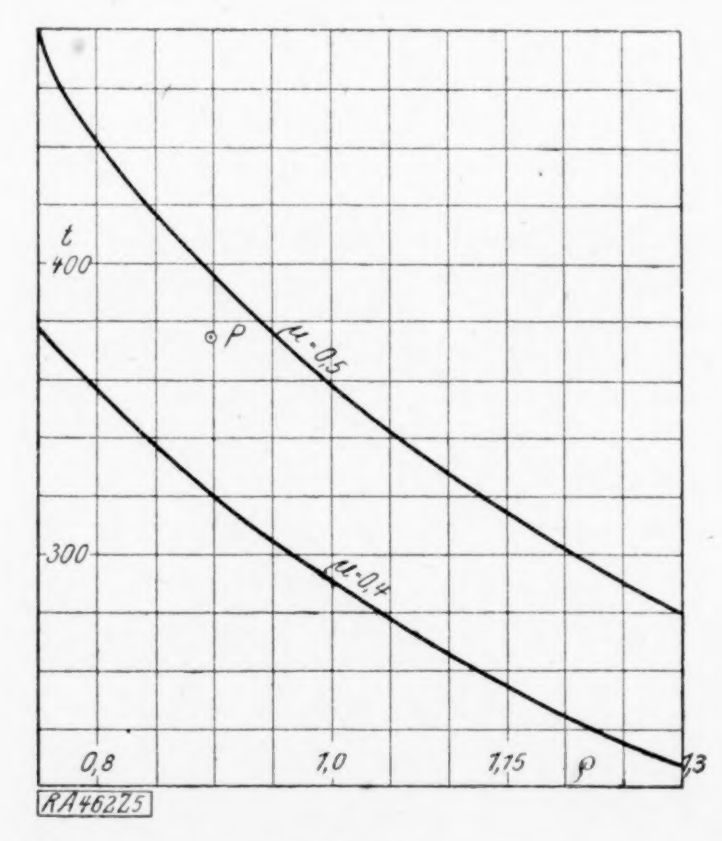


Abb. 4.

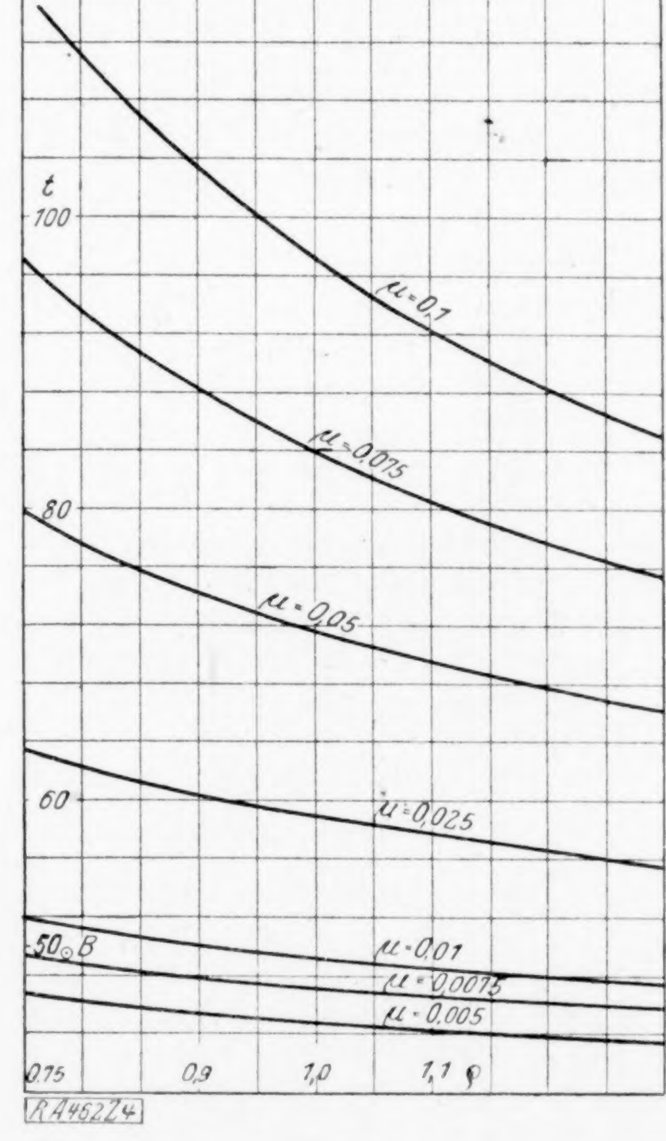


Abb 5.

[1]) L. Schiller, Forschungsarb. Heft 248, S. 28.
[2]) Die einfache Mittelung zulässig; darüber s. unten!
[3]) L. Schiller, Forschungsarb. Heft 248, S. 29, Fußn. 24.

weisen, wurde noch ein Schwerbenzin untersucht (Dichtungsmittel statt Pizëin hierbei Siegellack). Dichte $\varrho = 0{,}7795$; mit zweierlei Kapillarviskosimetern: $\mu = 0{,}00796$ bezw. $0{,}00800$. Ausflußzeit bei Engler (5 Versuche): 49,6 sec. Gibt in Abb. 5 Punkt B; dem entspricht: $\mu = 0{,}0081$. Fehler: 1,5 vH. Man sieht, daß auch hierbei der Apparat für praktische Zwecke völlig ausreicht.

7. Soll der »Engler« nur für Flüssigkeiten hoher Zähigkeit benutzt werden, so ergibt sich jetzt schließlich auch noch die Möglichkeit, mit Näherungsformeln die an dem gewöhnlichen Englerapparat gemessenen Englergrade richtig in absolute Zähigkeiten umzurechnen. Dabei sind allerdings die Englergrade nicht, wie bisher, zu beziehen auf die wirkliche Ausflußzeit von Wasser bei 20° C, sondern auf die idealisierte Ausflußzeit, die das Wasser haben würde, wenn keine Ablösung usw. statthätte. Eine solche tritt nämlich bei den geringen Reynoldsschen Zahlen, die bei Oelen vorhanden sind, augenscheinlich weitgehend zurück.

Als theoretische Näherungsformel für große Zähigkeitswerte gibt v. Mises an:

$$\mu = \varrho\left(0{,}0864\,E - \frac{0{,}08}{E}\right),\ \text{wo } E \text{ der Englergrad ist.}$$

Die empirische Formel von Ubbelohde lautet:

$$\mu = \varrho\left(0{,}0732\,E - \frac{0{,}0631}{E}\right).$$

Die Differenz dieser beiden Formeln gab Gümbel Anlaß zu Bedenken gegen die Misessche Theorie, ein Grund, der jedoch schlechthin noch nicht genügt. Denn berechnet man die Näherung nach Mises z. B. für die Abmessungen unseres Apparates (ohne Abrundung) und die experimentelle Ausflußzeit von 51,4 sec, so erhält man auch schon die von der obenstehenden abweichende Gleichung:

$$\mu = \left(0{,}08297\,E - \frac{0{,}07722}{E}\right)\varrho \ \text{für } \varkappa = 2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

bezw. $$\mu = \left(0{,}8297\,E - \frac{0{,}0834}{E}\right)\varrho \ \text{für } \varkappa = 2{,}16 \ \text{(Sch.'sche Theorie)} \quad (1\text{a}).$$

Abweichende Apparatabmessungen können also auch schon viel ausmachen.

Die Diskrepanz zwischen Theorie und Versuch wird jedoch auf die oben angegebene Weise praktisch völlig beseitigt. Rechnet man mit der idealisierten Ausflußzeit (nach der Sch.'schen Theorie berechnet) für Wasser $t = 48{,}51$ sec, definiert also für unseren Apparat (ohne Abrundung)

$$E = \frac{t_{\text{Oel}}}{48{,}51},$$

so ergibt sich

$$\mu = \left(0{,}0783\,E - \frac{0{,}08182}{E}\right)\varrho \ \text{für } \varkappa = 2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

bezw. $$\mu = \left(0{,}0783\,E - \frac{0{,}08836}{E}\right)\varrho \ \text{für } \varkappa = 2{,}16 \quad \ldots\ldots \quad (2\text{a}).$$

Berechnet man nach diesen vier Gleichungen aus dem Englergrad 6,8 unseres obigen Versuchsöles die Zähigkeit μ, so erhält man bz. 0,4975, 0,4967, 0,4694, 0,4679. Wir erhalten also mit (2) und (2a) eine nur geringfügige Abweichung gegen den anderweitig bestimmten Wert von 0,465. Damit ist der praktische Wert der Näherungsgleichung erwiesen

8. Für die Praxis wird man die hierfür nötige idealisierte Ausflußzeit des Wassers statt der etwas umständlichen Berechnung wohl gut genug bestimmen können, indem man die experimentelle Ausflußzeit mit Wasser ermittelt und diese im gleichen Verhältnis verringert, wie dies bei unserem Apparat der Fall ist, d. h. $\frac{48{,}51}{51{,}4}$ oder um 5,7 vH. Nimmt man diese verringerte Ausflußzeit als Bezugszeit, so wird man mit den Gleichungen (2) oder (2a) für zähe Oele jedenfalls auch ausreichende Resultate der absoluten Zähigkeit erhalten. Wünscht man den Engler jedoch auch für kleinere Zähigkeiten zu verwenden, so hat man eine Abrundung anzubringen und mit einer Kurventafel zu arbeiten, was auch sonst noch gewisse Vorzüge besitzt. Jedenfalls aber besteht auf eine der beiden Weisen eine zuverlässige Möglichkeit, mit dem Engler absolute Werte zu erhalten. Mutatis mutandis gilt das Entwickelte natürlich völlig analog für die englischen und amerikanischen Apparate, so daß sich die Umrechnung dieser ineinander[1]) und in Englergrade erübrigt. 462

[1]) Vergl. etwa W. H. Herrschel, Techn. Pap. Bur. of Stand 16, 227 (1922), Nr. 210; ferner Chem. and Metallurg. Eng. 26, 1175 (1922), Nr. 25. (Zitiert nach den »Phys. Ber.«)

Über langsame stationäre Strömungen in plastischen Massen mit Rücksicht auf die Vorgänge beim Walzen, Pressen und Ziehen von Metallen.

Von **HEINRICH HENCKY** in Delft.

Es versteht sich von selbst, daß so komplizierte physikalich-mechanische Vorgänge wie das Walzen und Pressen von Metallen nur dann einer theoretischen Behandlung fähig sind, wenn man weitgehende Vereinfachungen in den grundlegenden Annahmen eintreten läßt.

Wir werden im folgenden zwei derartige Vereinfachungen vornehmen. Die erste davon ist die Annahme isothermer Zustandsänderung. Bisherige Untersuchungen scheinen in der Tat zu zeigen, daß die Temperatur wenigstens bei einem Durchgang des Materials durch die Walze sich wenig ändert[1]). Wenn freilich die plastische Deformation bei gewöhnlicher Temperatur vorgenommen wird, ist ein Ausgleich kaum möglich; es bleibt uns aber kein Ausweg, wir müssen aus praktischen Gründen unser Problem auf ein rein mechanisches reduzieren.

Das strömende plastische Material betrachten wir teils als isotropen-elastischen Körper mit gegebener Plastizitätsgrenze, teils als inkompressible zähe Flüssigkeit. Die zweite Vereinfachung, die wir einführen, ist die Voraussetzung sehr langsamer Bewegungen, so langsam, daß der Einfluß der Massenträgheit gegenüber den großen Kräften der inneren Reibung vollkommen vernachlässigt werden kann[2]).

Wir erhalten auf diese Weise eigenartige Gleichgewichtszustände in plastischen Massen, die wir im folgenden als »stationäres Gleichgewicht« bezeichnen wollen.

Das System der Differentialgleichungen, in welchem wir unsere Grundannahmen aussprechen, hat den Vorzug, das es das einfachste ist, welches derartige Vorgänge überhaupt darstellen kann. Wenn dieser Umstand auch noch keinen ausreichenden Beweis für seine Richtigkeit bildet, so liegt darin doch eine gewisse Stärke, um so mehr als die Widersprüche und Unklarheiten, die bei einer rein erfahrungsmäßigen Beschreibung unseres Erscheinungsgebietes notwendig auftreten müssen, eine mathematisch mechanische Theorie der Vorgänge geradezu verlangen.

Wir werden daher den deduktiven Weg einschlagen, einerseits um eine begriffliche Klärung herbeizuführen, andererseits um zu zeigen, in welcher Richtung sich die experimentelle Forschung betätigen muß, damit die Bestimmung der Größen, deren die Praxis bedarf, vor allem die Feststellung der Arbeitsverluste, von einem gesicherten Fundament aus geschehen kann.

I. Allgemeine Theorie.

1. Die Differentialgleichungen des stationären Gleichgewichts und die Plastizitätsbedingung. In der gewöhnlichen Festigkeitslehre haben wir es mit einem Spannungstensor zu tun, der, wachgerufen durch die sehr klein zu denkende Deformation, das Gleichgewicht der Kräfte an den Volumenelementen herstellt. Die Komponenten dieses Tensors seien σ_x^s, σ_y^s, σ_z^s, τ_{xey}^s, τ_{xez}^s, τ_{yz}^s.

Der Index s möge andeuten, daß es sich um statisch und elastisch, nicht dynamisch erzeugte Spannungen handelt. Auch wenn bei der plastischen Deformation der Gleichgewichtszustand einem dauernden Fließen weicht, bleiben diese elastischen Spannungen bestehen, wenn sie sich auch in einer ganz bestimmten Weise, die wir noch feststellen müssen, ändern. Gleichzeitig aber tritt durch die dynamische Reibungskraft, die durch die Bewegung entsteht, ein anderer Tensor auf, dessen Komponenten wir mit σ_x^r, σ_y^r, σ_z^r, τ_{xy}^r, τ_{xz}^r, τ_{yz}^r bezeichnen wollen.

Wählen wir ein ruhendes Koordinatensystem, wie es bei der sogenannten Eulerschen Form der hydrodynamischen Gleichungen verwendet wird, so werden die Bewegungsgleichungen einer plastischen Masse unter den von uns angenommenen Einschränkungen die folgende Form haben:

[1]) G. Liss, Die Nutzarbeit des Walzvorganges, Stahl und Eisen 1922, S. 816.
[2]) vergl. G. Liss, loc. cit. S. 737.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x{}^s}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}{}^s}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}{}^s}{\partial z}+\frac{\partial \sigma_x{}^r}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}{}^r}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}{}^r}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial \tau_{yx}{}^s}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y{}^s}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}{}^s}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{yx}{}^r}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y{}^r}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}{}^r}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial \tau_{zx}{}^s}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}{}^s}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z{}^s}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{zx}{}^r}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}{}^r}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z{}^r}{\partial o}&=0\end{aligned}\quad \ldots \quad (1).$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen beziehen sich auf einen Raumteil dx, dy, dz mit festen Grenzen und gelten auch für das stationäre Fließen des Materials.

Zwischen den Komponenten des statischen Spannungstensors (σ^s) haben wir noch eine Beziehung, die Plastizitätsbedingung, während die Komponenten des Reibungstensors (σ^r) einer derartigen Beschränkung nicht unterliegen, sondern beliebig große Werte erreichen können.

Von dem Wesen der Plastizität erhalten wir am besten einen Begriff, wenn wir nacheinander eine Gummi- und eine Plastelinkugel deformieren. Während wir die Gummikugel fast unbegrenzt mit elastischer Gestaltänderungsenergie laden können, ist die Energiemenge, welche die Plastelinkugel in umkehrbarer Weise aufspeichern kann, äußerst gering. Die einfachste Plastizitätsbedingung erhalten wir also, wenn wir von dem elastischen Potential die Dilatations- und Kompressionsenergie abziehen — denn mit allseitiger Ausdehnung und Zusammenziehung hat die plastische Deformation offenbar nichts zu tun — und die Kapazität für Aufspeicherung von elastischer Gestaltsänderungsenergie als Maß der »plastischen Härte« betrachten.

Wenn ein allseitiger Druck bei sonst spröden Körpern das Auftreten plastischer Deformationen begünstigt, so liegt das nur daran, daß der allseitige Druck das Eintreten des Bruches, die Rissebildung, verhindert.

In unserem Falle ist die Gestaltsänderungsenergie identisch mit der elastischen Energie überhaupt, da wir das Material als inkompressibel betrachten.

Mit G als Schubmodul wird die Gestaltänderungsenergie [1]) auf die Volumeneinheit bezogen, solange die elastischen Deformationen sehr klein sind.

$$A_g=\frac{1}{2\,G}\left\{\frac{1}{6}\left[(\sigma_x{}^s-\sigma_y{}^s)^2+(\sigma_y{}^s-\sigma_z{}^s)^2+(\sigma_z{}^s-\sigma_x{}^s)^2\right]+\tau_{xy}{}^{s\,2}+\tau_{xz}{}^{s\,2}+\tau_{yz}{}^{s\,2}\right\}\quad . \; . \quad (2\,\mathrm{a}).$$

Zum Verständnis der plastischen Deformation müssen wir uns das Volumenelement als Gefäß vorstellen; gießt man mehr hinein als der Kapazität des Gefäßes entspricht, so läuft das Gefäß über, der aufgenommene Energiebetrag im Volumenelement bleibt also unter allen Umständen der gleiche, solange die Neigung zur plastischen Verformung, das heißt zum Ueberfließen der Energie andauert.

Bezeichnen wir mit $2\,k$ die Grenz-, Zug- oder Druckspannung beim einachsigen Spannungszustand, so erhalten wir unsere Plastizitätsbedingung in der folgenden einfachen Form [2]):

$$\Phi=A_g-\frac{2}{3}\,\frac{k^2}{G}=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2\,\mathrm{b})\,^2),$$

k ist dabei als Konstante zu betrachten.

Für den Fall eines ebenen Verzerrungszustandes von inkompressibelem Material ist diese Plastizitätsbedingung identisch mit der Hypothese der maximalen Schubspannungen von St. Venant und Guest-Mohr, für den räumlichen Fall stimmt sie viel besser mit neueren Versuchsergebnissen überein als die genannten früheren Hypothesen, welche überdies sich zur Grundlage einer mathematischen Plastizitätstheorie nicht eignen.

2. Der Zusammenhang zwischen dem Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten und dem Tensor der Spannungen (σ^s). An jedem Punkt in unserem festen Koordinatensystem haben wir einen Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten u, v, w in der x-, y-, z-Richtung.

[1]) Vergl. A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. I, S. 40.

[2]) Hinsichtlich dieser Plastizitätsbedingung vergleiche die folgenden Arbeiten: A. T. Huber, Czasopismo technizne Lemberg 1904 (in poln. Sprache), worin sich die erste Formulierung unserer Plastizitätsbedingung findet. v. Mises, Göttinger Nachrichten 1913, S. 582 bis 592. — D. P. Haigh, Engeneering 1920, S. 158 bis 160. — H. Hencky, Internat. Congress voor technische Mechanik, Delft 1924, Uittreksels der voordrachten, S. 84 bis 86 und diese Zeitschrift Jahrg. 1924 S. 323 bis 334.

Sind ε_x, ε_y, ε_z, $^1/_2\,\gamma_{xy}$, $^1/_2\,\gamma_{xz}$, $^1/_2\,\gamma_{yz}$ die Komponenten des Tensors der Geschwindigkeitsänderungen, ist also

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

so besteht unsere Aufgabe nunmehr darin, eine Beziehung zwischen dem statischen Spannungstensor und diesen Deformationsgeschwindigkeiten zu finden.

Diese Beziehung erhalten wir durch die Forderung, daß der Tensor der σ^s koaxial mit dem Tensor der Gl. (3) sein muß, d. h. daß die 3 Richtungen der Hauptspannungen mit den 3 Richtungen der Hauptdehnungsgeschwindigkeiten zusammenfallen[1]), und daß das Verhältnis zwischen Schiebungsgeschwindigkeit und elastischer Schubspannung von der Richtung unabhängig sei. Führen wir einen vorläufig unbekannten Multiplikator λ ein, so können wir die Bedingung der Koaxialität in den Formeln ansprechen

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_x - \varepsilon_y = \dfrac{1}{2\,\lambda}(\sigma_x^s - \sigma_y^s) & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{\lambda}\,\tau_{xy}^s \\ \varepsilon_y - \varepsilon_z = \dfrac{1}{2\,\lambda}(\sigma_y^s - \sigma_z^s) & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{\lambda}\,\tau_{yz}^s \\ & \gamma_{xz} = \dfrac{1}{\lambda}\,\tau_{xz}^s \end{array}$$

An diesen Gleichungen wird nichts geändert, wenn wir sie nach Einführung einer weiteren Unbekannten p in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_x = \dfrac{1}{2\,\lambda}(\sigma_x^s + p) & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{\lambda}\,\sigma_{xy}^s \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{2\,\lambda}(\sigma_y^s + p) & \gamma_{xz} = \dfrac{1}{\lambda}\,\tau_{xz}^s \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{2\,\lambda}(\sigma_z^s + p) & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{\lambda}\,\tau_{yz}^s \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4\,a).$$

Wegen der Inkompressibilität des Materials ist aber

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = o \ \text{ oder } \ \sigma_x^s + \sigma_y^s + \sigma_z^s + 3\,p = o,$$

d. h.

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x^s + \sigma_y^s + \sigma_z^s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4\,b.$$

Der Koeffizient λ ist natürlich eine Ortsfunktion von x, y, z, bei nichtstationären Bewegungen auch von der Zeit t; zu seiner Bestimmung haben wir noch eine Gleichung, nämlich die Plastizitätsbedingung (2), die wir bis jetzt noch nicht verwendet haben.

Wir kehren zunächst (4a) um und erhalten

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_x^s = 2\,\lambda\,\varepsilon_x - p; & \tau_{xy}^s = \lambda\,\gamma_{xy} \\ \sigma_y^s = 2\,\lambda\,\varepsilon_y - p; & \tau_{xz}^s = \lambda\,\gamma_{xz} \\ \sigma_z^s = 2\,\lambda\,\varepsilon_z - p; & \tau_{yz}^s = \lambda\,\gamma_{yz} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Der mechanische Sinn dieses Gleichungssystemes ist der, daß bei Eintritt des Fließens die elastischen Spannungen direkt durch die Deformationsgeschwindigkeiten bestimmt werden. Die elastischen Deformationen können dann wie bei statisch bestimmten Systemen aus den Spannungen berechnet werden. Den Wert von λ erhalten wir durch Einsetzen von Gl. (5) in die Gleichungen (1) und (2) zu

$$\lambda = \frac{2\,k}{\sqrt{3}}\left\{2\,(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right\}^{-1/2} \quad \ldots\ldots \quad (6\,a),$$

wobei natürlich

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\,b)$$

zu setzen ist.

---

[1]) Vergl. hierzu Boussinesq, Annales de l'école normale superieure tom 35. 1918, S. 70 bis 128. (Mecanique des semifluides), ferner v. Mises, Göttinger Nachrichten, loc. cit.

λ hat die Dimension $\frac{\mathrm{kg\,sec}}{\mathrm{cm}^2}$, d. h. dieselben Dimensionen wie der Koeffizient der Flüssigkeitsreibung. Damit haben wir die Möglichkeit gewonnen, aus den Gleichgewichtsbedingungen die Komponenten des statischen Spannungstensors zu eliminieren und durch u, v, w und p auszudrücken.

3. Reibungsspannungen, Arbeitsverbrauch und endgültige Form der Differentialgleichungen des stationären Gleichgewichts. Die praktische Forderung der möglichsten Einfachheit des theoretischen Ansatzes zwingt uns, für die Reibungsspannungen den gleichen Ansatz zu machen, welcher sich auch in der Theorie der zähen Flüssigkeiten bewährt hat.

Ist $\varkappa$ der Koeffizient der inneren Reibung $\left(\text{Dimension } \frac{\mathrm{kg\,sec}}{\mathrm{cm}^2}\right)$, der natürlich nicht identisch sein muß mit dem Reibungskoeffizienten innerhalb des elastischen Gebietes, so erhalten wir den Spannungstensor σ^r in folgender Form

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_x{}^r = 2\,\varkappa\,\varepsilon_x; & \tau_{xy}{}^r = \varkappa\,\gamma_{xy} \\ \sigma_y{}^r = 2\,\varkappa\,\varepsilon_y; & \tau_{xz}{}^r = \varkappa\,\gamma_{xz} \\ \sigma_z{}^r = 2\,\varkappa\,\varepsilon_z; & \tau_{yz}{}^r = \varkappa\,\gamma_{yz} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

der auf diese Weise also koaxial mit dem statischen Tensor (σ^s) angenommen wird. $\varkappa$ ist bei isothermer Zustandsänderung eine Konstante.

Wir sehen, daß die Formeln (5) und (7) sich nur durch den hydrostatischen Druck unterscheiden, der bei der Plastizität keine Rolle spielt, und durch den verschiedenen Proportionalitätsfaktor. Ohne diese formale Aehnlichkeit, die aus der angenommenen Proportionalität der von der Gestaltänderung abhängenden Spannungszustände folgt, könnten wir natürlich die Differentialgleichungen nicht auf die einfache Art ableiten, wie wir es tun, sondern hätten ein schwieriges Problem der Variationsrechnung vor uns.

Bevor wir die Differentialgleichungen in ihrer endgültigen Form ableiten, wollen wir noch den Ausdruck für den Arbeitsverbrauch ansetzen. Arbeit leisten natürlich die beiden Spannungstensoren (σ^s und σ^r), es wird die Energie per Zeiteinheit und Volumeneinheit, welche verloren geht

$$D = (\sigma_x{}^s + \sigma_x{}^r)\,\varepsilon_x + (\sigma_y{}^s + \sigma_y{}^r)\,\varepsilon_y + (\sigma_z{}^s + \sigma_z{}^r)\,\varepsilon_z + (\tau_{xy}{}^s + \tau_{xy}{}^r)\,\gamma_{xy} + (\tau_{xz}{}^s + \tau_{xz}{}^r)\,\gamma_{xz} + (\tau_{yz}{}^s + \tau_{yz}{}^r)\,\gamma_{yz}.$$

Setzen wir die Werte von σ^s und σ^r ein und beachten, daß $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$, der hydrostatische Druck demnach keine Arbeit leistet, so erhalten wir

$$D = (\varkappa + \lambda)\,\{2\,(\varepsilon_x{}^2 + \varepsilon_y{}^2 + \varepsilon_z{}^2) + \gamma_{xy}{}^2 + \gamma_{xz}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2\} \quad \ldots\ldots$$

oder mit (6 a)

$$D = \frac{4}{3}\,(\varkappa + \lambda)\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Bedenkt man, daß $\varkappa$ eine Konstante, λ eine Größe, welche umgekehrt proportional der Geschwindigkeit sein muß, so sieht man, daß im allgemeinen Fall eine einfache Proportionalität zwischen Energieverlust und Geschwindigkeit nicht bestehen kann. Das stimmt überein mit den Bestrebungen von Herrn Liss[2]), eine Interpolationsformel für das wirklich auftretende Verhältnis aufzustellen.

Der experimentellen Forschung muß es natürlich vorbehalten bleiben, zu zeigen, innerhalb welcher Grenzen unser Ansatz der Wirklichkeit entspricht.

Setzen wir (5) und (7) in Gl. (1) ein, bezeichnen wir mit dem Symbol Δ den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ und beachten die Beziehungen (6 a) und (6 b), so erhalten wir für die 5 Unbekannten p, u, v, w, λ außer den genannten Gleichungen (6 a) und (6 b) noch die 3 Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = (\varkappa + \lambda)\,\Delta u + 2\,\varepsilon_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \gamma_{xy} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma_{xz} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = (\varkappa + \lambda)\,\Delta v + \gamma_{yz} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2\,\varepsilon_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma_{yz} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = (\varkappa + \lambda)\,\Delta w + \gamma_{xy} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \gamma_{zy} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + 2\,\varepsilon_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

---

[1]) Vergl. hierzu die entsprechenden Entwicklungen in A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. VI, S. 70.

[2]) G. Liss, Die Nutzarbeit des Walzvorganges, Stahl und Eisen 1922.

Für $\lambda = 0$ erhält man natürlich die gewöhnlichen bekannten Gleichungen für die stationäre Bewegung einer sehr zähen Flüssigkeit. Mit den Gleichungen (6) und (9) ist das Problem der plastischen Strömung auf ein mathematisches Problem zurückgeführt, denn den 5 Unbekannten entsprechen nun 5 Gleichungen. Die Grenzfläche des elastischen und plastischen Gebietes wird dadurch charakterisiert, daß an ihr der dynamische Spannungstensor (σ^r) verschwindet und nur der statische Spannungstensor (σ^s) übrig bleibt.

Wir sehen daraus, die Vorgänge im festen elastischen Teil haben auf den in plastischer Bewegung befindlichen Teil keinen Einfluß. Die Grenzfläche läßt sich aber im allgemeinen Fall nicht von vornherein angeben, sondern nur durch allmähliche Näherung festellen. Hat man nämlich unter Annahme einer passend gewählten Grenzfläche die Spannungen als Funktionen von x, y, z gefunden, so erhält man durch Einsetzen dieser Werte in die Plastizitätsbedingung

$$\Phi = A_g - \frac{2}{3}\frac{k^2}{G} = o$$

eine verbesserte Grenzfläche, mit welcher man die Rechnung wiederholen kann.

Da man eine klare Einsicht in diese Verhältnisse am besten durch einfache Anwendungen der Theorie erhält, wollen wir uns der Behandlung einiger Beispiele zuwenden, die zwar sehr einfach sind, aber doch in Beziehung zu dem Prozeß des Walzens, Pressens und Ziehens von Metallen stehen, dessen Erforschung für die Technik von Bedeutung ist.

II. Einige Anwendungen.

1. Ein Kriterium, um plastische und zähflüssige Körper zu unterscheiden. Das Drehen einer Walze im plastischen Material. Wir haben bei Ableitung der Gleichungen (9) bereits bemerkt, daß dieselben für $k = o$ in die entsprechenden Gleichungen für die zähen Flüssigkeiten übergehen; nicht immer ist aber dieser Uebergang möglich, denn wir müssen noch den Randbedingungen Rechnung tragen. Ein Beispiel möge dies erläutern.

Ein Zylinder von unendlich großer Steifheit (Radius a) stecke in einer plastischen Masse. Wir fragen nach der Bewegung, weche in der plastischen Masse entsteht, wenn der Zylinder langsam und gleichmäßig gedreht wird und wenn vorausgesetzt wird, daß er das plastische Material in seiner unmittelbaren Nähe mitnimmt.

Die Lösung des Problems ist von Interesse zur Beurteilung der Schubkräfte, die eine Walze beim Eingreifen in das Walzgut ausüben kann.

Zunächst ist klar, daß in einem endlichen Abstand r_o von der Zylinderachse der Zustand der Ruhe eintreten muß, da die Spannungen abnehmen und schließlich die Plastizitätsgrenze unterschreiten müssen.

Wir setzen im folgenden ebenen Verzerrungszustand voraus und legen unsere z-Achse in die Zylinderachse.

Die Bewegung beziehen wir auf Polarkoordinaten (u in radialer Richtung, v in tangentialer Richtung).

Aus der Inkompressibilität des Materials können wir sogleich einen Schluß auf die Größe der Komponente u ziehen. Es ist nämlich $\varepsilon_z = o$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = u'\,{}^{1)}; \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r} \end{aligned}\right\} \quad \gamma_{rt} = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = v' - \frac{v}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und nach Gl. (6b) $u' + \frac{u}{r} = o$ oder $u = \frac{C}{r}$.

Da für $r = a$, $u = o$ und v konstant sein soll, so muß $C = 0$ sein und also u durchaus verschwinden.

Hierdurch wird aus (6a)

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}}\gamma^{-1} \text{ und } \frac{d\lambda}{dr} = \lambda' = -\frac{2k}{\sqrt{3}}\frac{\gamma'}{\gamma^2} = -\frac{\lambda}{\gamma}\gamma'.$$

---

[1]) Durch Akzente bezeichnen wir nichtpartielle Differentialquotienten, wo eine Zweideutigkeit nicht entstehen kann.

Die erste der Gleichungen (9) reduziert sich auf die Aussage, daß p konstant ist. (x-Achse in radialer Richtung gedacht.) Die zweite Gleichgewichtsgleichung in Richtung der Tangente lautet

$$\frac{d}{dr}(\tau^s r) + \tau^s + \frac{d}{dr}(\tau^r r) + \tau^r = o,$$

woraus sich nach Einführung der Spannungswerte $\tau^s = \lambda\gamma$ und $\tau^r = \varkappa\gamma$ die Gleichung

$$(\varkappa + \lambda)(r\gamma' + 2\gamma) + r\gamma\lambda' = o$$

ergibt. Setzt man hier den Wert von λ ein, so ergibt sich nach einer kleinen Umformung

$$r\frac{d\gamma}{dr} + 2\gamma = -\frac{4k}{\sqrt{3}\,\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Da im Abstand r_0 die Schiebungsgeschwindigkeit γ verschwinden muß, kann die Lösung nur lauten

$$\gamma = \frac{2k}{\sqrt{3}\,\varkappa}\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right\}$$

γ ist also von $r = a$ bis $r = r_0$ positiv. Da aber nach (10) $v' = \frac{v}{r} + \gamma$ in diesem Falle ebenfalls positiv wird, so wird v eine monoton zunehmende Funktion mit wachsendem r, was offenbar unmöglich ist, da $v = 0$ für $r = r_0$ und $v = \omega a$ für $r = a$. Die Randbedingungen lassen sich also nur befriedigen, wenn das Integrationsgebiet der Gl. (11) verschwindet, d. h. wenn $r_0 = a$ wird.

Es ist also nicht möglich, daß eine Walze bei rotationssymmetrischer Deformation das Material mitnimmt. Die Walze dreht sich einfach im Material und erzeugt dabei keine größere Spannung als die Grenzschubspannung des Materials.

Das merkwürdige dieses Ergebnisses besteht darin, daß eine zähe Flüssigkeit ($k = 0$) die Bewegung ausführen würde

$$v = \omega\frac{a}{r} \quad (\omega \text{ Winkelgeschwindigkeit der Walze}),$$

wobei eine Spannung $\tau^r = -2\omega\varkappa$ an der Zylinderwand wachgerufen würde. Wie klein man nun auch k nehmen mag, der angeführte prinzipielle Unterschied bleibt bestehen. Wir haben darin also ein Kriterium, ob wir eine zähe Flüssigkeit vor uns haben oder eine plastische Masse.

2. Das Durchpressen von plastischen Massen durch zylindrische Hohlräume, Analogon zur Poiseuilleschen Strömung in Röhren. Wir stellen uns vor, daß wir eine plastische Masse durch ein unendlich steifes Rohr vom Durchmesser 2 b durchpressen wollen. Die plastische Masse möge dabei ebenso an der Rohrwand haften wie eine Flüssigkeit. Wir legen die z-Achse in die Rohrachse, die r-Achse in Richtung des Radius und transformieren zunächst die Gleichungen (6) und (9) auf Zylinderkoordinaten.

Unter Voraussetzung von Rotationssymmetrie ergeben sich dann die folgenden Beziehungen

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \;\Big|\; \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}}\left\{2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma^2\right\}^{-1/2} \quad \ldots\ldots\ldots (12\,a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12\,b)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= (\varkappa + \lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ur)}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + 2\,\varepsilon_r\frac{\partial\lambda}{\partial r} + \gamma\frac{\partial\lambda}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= (\varkappa + \lambda)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right\} + \gamma\frac{\partial\lambda}{\partial r} + 2\,\varepsilon_z\frac{\partial\lambda}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12\,c).$$

Bei stationärer Strömung im Rohr wird $u = o$ und $\varepsilon_z = o$, also

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}}\frac{1}{\frac{dw}{dr}} \text{ und } \frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0,$$

d. h. nach Gl. (12c), daß p ebenfalls von r unabhängig ist und daß $\frac{\partial p}{\partial z}$ eine Konstante wird.

Nach Einsetzen der Werte wird die zweite der Gleichungen (12c), die das Druckgefälle angibt, mit einiger Umformung $\left(\text{mit } \frac{dw}{dr} = w'\right)$

$$\frac{\sqrt{3}}{2k}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\varkappa}{k}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(w'' + \frac{w'}{r}\right) + \frac{1}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\text{a}).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung, welche auch die Randbedingungen befriedigt, lautet

$$w = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{k}{\varkappa}\cdot b\left\{1 - \frac{r}{b} - {}^1/_4\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{b}{k}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)\right\} \quad \ldots \ldots \quad (13\text{b}).$$

Wegen der Plastizitätsbedingungen ist es aber nicht möglich, daß die plastische Deformation sich bis $r = 0$ fortsetzt, es wird einen Radius $r_0 < b$ geben, von welchem ab die plastische Masse sich wie ein fester Körper durch das Rohr schiebt. Diesen Wert von r_0 bestimmt man sehr einfach aus der Gleichgewichtsbedingung für den Zylinder mit dem Radius r_0

$$2\,r_0\,\pi\cdot\frac{2k}{\sqrt{3}} = \frac{\partial p}{\partial z}\cdot r_0^2\,\pi, \quad \text{d. h. } r_0 = \frac{4k}{\sqrt{3}\,\frac{\partial p}{\partial z}}.$$

Um frei von den Dimensionen zu werden, führen wir eine Zahl η ein, welche wir durch die Gleichung definieren

$$\eta = \frac{r_0}{b} = \frac{2k}{\sqrt{3}}\,\frac{2\,b\,\pi}{b^2\,\pi\,\frac{\partial p}{\partial z}} = \frac{\text{Spannung} \times \text{Umfang der Röhre}}{\text{Druckunterschied} \times \text{Querschnittsfläche}} \quad \ldots \quad (13\text{c}).$$

Ohne weiteres erkennt man, daß für ein Verhältnis $\eta = 1$ keine Plastizität und infolgedessen keine Strömung eintreten kann.

Mit der neuen Bezeichnung finden wir aus Gl. (13b) für $r = r_0$ die Geschwindigkeit des mittleren Teils, der sich wie ein fester Körper bewegt zu

$$w_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{k}{\varkappa}\cdot b\left[1 - {}^1/_2\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)\right].$$

In der Tat wird für $\eta = 1$

$$w = o.$$

Nach den Rohrwänden zu nimmt dann die Geschwindigkeit parabolisch ab, wobei, wie man leicht erhält

$$\gamma = \frac{dw}{dr} = \frac{2k}{\sqrt{3}\,\varkappa}\left[-1 + \frac{r}{r_0}\right],$$

es wird also

$$\tau' = \frac{2k}{\sqrt{3}}; \quad \tau^r = \frac{2k}{\sqrt{3}}\left[-1 + \frac{r}{r_0}\right] \text{ und } \tau' + \tau^r = \frac{2k}{\sqrt{3}}\,\frac{r}{r_0}.$$

Es herrscht also

an der Zylinderfläche vom Radius r_0 die Spannung $\frac{2k}{\sqrt{3}}$,

» » » » » b » » $\frac{2k}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\eta}$.

In der Tat ist $2\,b\,\pi\cdot\frac{2k}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\eta} = b^2\,\pi\,\frac{\partial p}{\partial z}$, wie man aus der Definitionsgleichung von η ohne weiteres sieht.

Man erkennt hier sehr schön, wie die Reibungskraft eingreift, um das verletzte Gleichgewicht, das nicht mehr auf statische Weise hergestellt werden kann, auf dynamische Weise zu kompensieren, da die Massenträgheitskräfte viel zu klein sind, um einen Vergleich mit den Reibungskräften auszuhalten.

Durchflußmenge: Genau wie in der Hydrodynamik können wir auch die Durchflußmenge in der Zeiteinheit bestimmen.

Mit $w = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{k}{\varkappa}\cdot b\left[1 - \frac{r}{b} - \frac{1}{2\,\eta}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)\right]$ erhält man für die Durchflußmenge Q

$$Q = 2\,\pi\left\{\int_0^{r_0} r\,w\,dr + \int_{r_0}^{b} r\,w\,dr\right\}$$

und nach einiger Umformung und Auswertung der Integrale

$$Q = \frac{b^4 \pi}{24 \varkappa} \frac{\partial p}{\partial z} \{-3 + 4 \eta - \eta^4\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

für $k = 0$, d. h. $\eta = o$, erhalten wir tatsächlich den bekannten von Poiseuille gefundenen Wert

$$Q = -\frac{b^4 \pi}{8} \cdot \frac{\partial p}{\partial z},$$

der natürlich positiv wird, wenn w in Richtung der positiven z-Achse gerechnet und $\frac{\partial p}{\partial z}$ negativ ist.

Um die physikalischen Grundlagen der Theorie des stationären Gleichgewichts einer experimentellen Prüfung zu unterziehen, dürfte sich ein derartiger Durchflußversuch weit besser eignen als etwa Versuche in Walzwerken, die ihre eigentliche Bedeutung erst erlangen, wenn die physikalischen Konstanten festliegen.

Der Arbeitsverbrauch. Eine gewisse Kontrolle unserer bisherigen Entwicklungen ermöglicht noch die Berechnung des Arbeitsverbrauchs. Wir müssen dreierlei Arbeiten unterscheiden.

I. Eine elastische Arbeit im mittleren Teil, der sich wie ein elastischer Körper fortschiebt.

II. Eine elastische Arbeit im plastischen Teil, um das Material an die Plastizitätsgrenze zu bringen.

III. Die eigentliche Reibungsarbeit (nach Gl. (8). Alle 3 Arbeiten beziehen sich auf die Einheit der Rohrlänge. Die Arbeiten unter I. und II. haben die Dimension $\frac{\text{kg cm}}{\text{cm}}$. Die Arbeit unter III. ist ein Effekt und hat die Dimension $\frac{\text{kg cm}}{\text{sec cm}}$. Demgemäß hat die elastische Arbeit mit der Geschwindigkeit nichts zu tun, sie hängt in erster Linie von dem Volumen ab, welches auf die Plastizitätsgrenze gebracht werden soll. Auch dieser Zerfall der Arbeit in zwei Teile ist bereits in der mehrfach erwähnten Arbeit von Liss bemerkt und hervorgehoben worden.

Wir erhalten für die Arbeit unter I.

$$A_I = \frac{1}{2G} \int_0^{r_0} \tau'^2 \, 2 r \pi \, dr \quad \text{mit} \quad \tau' = \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{r}{r_0},$$

der Spannung im elastischen Teil wird dies Integral

$$A_I = \frac{4 k^2 \pi}{3 G r_0^2} \int_0^{r_0} r^3 \, dr = \frac{k^2 r_0^2 \pi}{3 G};$$

für die Arbeit unter II. wird $A_{II} = \frac{2 k^2 \pi}{3 G}(b^2 - r_0^2)$; für die Arbeit unter III. nach Gl. (8)

$$A_{III} = \int_{r_0}^{b} (\varkappa + \lambda) \gamma^2 \cdot 2 r \pi \, dr \quad \text{und da} \quad \lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}} \gamma^{-1}; \; \gamma = \frac{2k}{\sqrt{3}\,\varkappa}\left(-1 + \frac{r}{r_0}\right),$$

$$A_{III} = \frac{8 k^2 \pi}{3 \varkappa} \left\{ \int_{r_0}^{b} r \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2 dr + \int_{r_0}^{b} r \left(-1 + \frac{r}{r_0}\right) dr \right\},$$

$$A_{III} = \frac{b^4 \pi}{24 \varkappa} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \{3 - 4 \eta + \eta^4\}.$$

Im ganzen ergibt sich also

$$A_{\text{elast}} = {}^2/_3 \, \frac{k^2}{G} b^2 \pi \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15\,\text{a})$$

und unter Beachtung von Gl. (14)

$$A_{\text{reib}} = -Q \frac{\partial p}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15\,\text{b}),$$

also für alle η wieder den bekannten Wert für die zähe Flüssigkeit, den wir natürlich ohne weiteres hätten anschreiben können. Sind einmal die physikalischen Konstanten $\varkappa$ und k festgestellt, so kann man auch schwierigere Randwertprobleme, zum Beispiel das ebene Blockwalzen, in Angriff nehmen. Man muß dabei bedenken, daß den Differentialgleichungen (9) zwar mit den klassischen Methoden nicht beizukommen ist, daß sie sich aber ganz gut zur numerischen Integration eignen. Insbesondere gilt dies für das ebene Problem, bei welchem man eine Stromfunktion einführen kann.

3. Der Zugversuch und die Instabilität der gleichmäßigen plastischen Dehnung. Ein weiteres einfaches Beispiel zur Anwendung unserer Theorie, welches ebenfalls eine strenge Integration zuläßt, bildet der Zugversuch eines zylindrischen Stabes von kreisförmigem Querschnitt (Radius r). Wir beziehen uns auf die Gl. (12), die wir ohne Aenderung übernehmen können. Da hier aus Symmetriegründen $\gamma = o$, so muß — gleichmäßige Dehnung zunächst vorausgesetzt — alles von der z-Koordinate unabhängig sein. Außerdem ist natürlich ε_z auch unabhängig von r, $\varepsilon_r = \varepsilon_t$ und wegen $\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_t = o$; $\varepsilon_r = \varepsilon_t = -\frac{1}{2}\varepsilon_z$ demgemäß $\lambda = \frac{2k}{3\varepsilon_z}$. Mit Hilfe der Gleichungen (5) und (7) werden die Spannungen

$$\sigma_r^s = \sigma_t^s = 2\lambda\varepsilon_r - p = -\frac{2k}{3} - p$$

$$\sigma_z^s = 2\lambda\varepsilon_z - p = +\frac{4k}{3} - p$$

ferner

$$\sigma_r^r = \sigma_t^r = -\varkappa\varepsilon_z, \qquad \sigma_z^r = +2\varkappa\varepsilon_z,$$

also wegen des spannungsfreien Zylindermantels

$$\sigma_r^r + \sigma_r^r = \sigma_t^s + \sigma_t^r = -{}^2/_3 k - p - \varkappa\varepsilon_z = o,$$

woraus

$$-p = {}^2/_3 k + \varkappa\varepsilon_z$$

und damit

$$\sigma = \sigma_z^s + \sigma_z^r = {}^4/_3 k - p + 2\varkappa\varepsilon_z = 2k + 3\varkappa\varepsilon_z.$$

Bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von $\frac{\partial w}{\partial z}$ kann also der Stab eine Spannung aushalten von

$$\sigma = 2k + 3\varkappa\frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Auch hier wird wieder der Ueberschuß der Spannung über die Plastizitätsgrenze $2k$ durch die Deformationsgeschwindigkeit kompensiert.

Ebenso, wie man gewöhnlich Spannungen und Dehnungen in Diagrammform aufträgt, kann man auch ein Spannungsdehnungsgeschwindigkeitendiagramm aufzeichnen.

Man erkennt, daß nur dieses letztere Diagramm jenseits der Plastizitätsgrenze einen physikalischen Sinn hat. Auf die Messung der Deformationsgeschwindigkeit wird beim Zugversuch im allgemeinen wenig geachtet, wodurch Mißverständnisse eintreten und insbesondere eine falsche Beurteilung der Verfestigungserscheinungen veranlaßt werden kann.

Wir wollen nun annehmen, ein Stab sei durch eine konstante Last P gedehnt, so daß $\sigma = \frac{P}{r^2\pi} > 2k$. Mit $\frac{\partial w}{\partial z}$ als Dehnungsgeschwindigkeit wird die Geschwindigkeit des Umfanges in radialer Richtung $u_r = -\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial z}\cdot r$ und die Vergrößerung des Radius in der Zeit dt

$$dr = -\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial z}\cdot r\,dt \text{ oder } \frac{2\,dr}{r\cdot dt} = -\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Durch Differentiation der Gl. (16) erhalten wir $\frac{d\sigma}{dt} = 3\varkappa\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ und durch Differentiation von $\sigma = \frac{P}{r^2\pi}$ ergibt sich $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{P}{r^2\pi}\cdot\frac{2\,dr}{r\,dt} = \sigma\frac{\partial w}{\partial z}$.

Durch Vergleich der beiden Differentialquotienten $\frac{d\sigma}{dt}$ also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \left(\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17\text{a}),$$

wobei $\beta = \frac{2k}{3\varkappa}$ eine physikalische Konstante von der Dimension einer Winkelgeschwindigkeit; mit $m = 1 + \frac{\beta}{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0} = \frac{1}{1 - \frac{2k}{\sigma_o}}$, wobei der Index o den Wert dieser Größen zur Zeit $t = 0$ bedeutet, erhalten wir durch Integration

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{\beta e^{\beta t}}{m - e^{\beta t}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17\text{b}).$$

War f_o die Querschnittsfläche zur Zeit $t = o$, so ist die Querschnittsfläche zur Zeit t

$$\frac{f}{f_o} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \{m - e^{\beta t}\} = \left(\frac{\sigma_o}{2k} - 1\right)(m - e^{\beta t}) \quad . \; . \; . \; . \quad (17\text{c})$$

Die Querschnittsfläche wird auf Null reduziert sein sobald eine Zeit T abgelaufen ist, welche sich aus $m = e^{\beta T}$ bestimmt
also

$$T = \frac{1}{\beta}\ln m \text{ oder } = \frac{3\varkappa}{2k}\ln\frac{1}{1 - \frac{2k}{\sigma_o}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Für alle Punkte die nicht im ruhend gedachten Koordinatenursprung liegen, würden dabei unendlich große Geschwindigkeiten w auftreten, wenn die plastische Dehnung gleichmäßig wäre. Der Stab müßte also nach Ablauf der Zeit T einfach verschwunden sein. In Wirklichkeit vollzieht sich der Vorgang aber so, daß sich an einer zufällig schwächeren Stelle eine Einschnürung bildet, deren progressives Fortschreiten nach Gl. (16) leicht verständlich wird. Dieser eingeschnürten Stelle gegenüber bleibt dann der übrige Teil des Stabes im Tempo zurück. Bei einem vollkommen plastischen (nicht spröden) Material würde sich der Querschnitt tatsächlich auf einen Punkt zusammenziehen.

Die plastische Strömung ist nun natürlich nicht mehr stationär und wir müssen dem Querschnitt mit unserer Differentiation nach der Zeit folgen. Wir haben also immer an Stelle $\frac{d}{dt}$ in der obigen Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial t}$ zu setzen. Bleiben wir aber in unmittelbarer Nähe der Einschnürung und legen dorthin unseren Ursprung, so können wir $w\frac{\partial}{\partial t}$ vernachlässigen und unsere obige Entwicklung beibehalten, freilich gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt vorausgesetzt.

Wir erhalten also in (17c) für jeden Zeitpunkt die jeweilige Größe des Querschnitts bis zum Abreißen des Stabes und in (18) die Zeitdauer bis zum Abreißen selbst. Bei der experimentellen Prüfung dieser Formeln dürfte sich die Verfestigung, welche wir nicht berücksichtigen konnten, störend bemerkbar machen.

Wir haben uns vorläufig absichtlich auf solche Beispiele beschränkt, bei welchen die Auflösung der Gleichungen keine Schwierigkeiten macht, um den mechanischen Sinn der entwickelten Beziehungen möglichst unbeeinflußt von rein rechnerischen Schwierigkeiten hervortreten zu lassen. Die Größen, von denen alles abhängt, Plastizitätsgrenze und Reibungskoeffizient, sind in hohem Maße von der Temperatur und von der Behandlung des Materials abhängig. Sache der experimentellen Forschung wird es sein, diese Abhängigkeiten festzustellen. Es handelt sich dabei um die Grundlegung eines Zweiges der Festigkeitslehre, der für die praktischen Anwendungen von allermindest ebenso großer Bedeutung ist wie die klassische Elastizitätstheorie, die den Aufgaben der technologischen Mechanik nicht mehr gewachsen sein kann.

In der letzten Zeit hat sich die Forschung auf dem Gebiet der technologischen Mechanik mehr dem Studium des Kleingefüges zugewendet. Die Bedeutung dieses Studiums ist in der Tat nicht zu unterschätzen, aber erst unter Zugrundelegung einer phänomenologischen mechanischen Theorie, welche einerseits das erklärt, was mit dem Kleingefüge nichts zu tun hat, andererseits die notwendigen neuen Begriffsdefinitionen wie z. B. für Härte, Verfestigung liefert, wird dieses Studium diejenige Präzision erlangen, die einer exakten Naturwissenschaft zukommt. 450

Vorträge der Dresdener Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Auf der Dresdener Versammlung am 6. und 7. März 1925, die in der Hauptsache der Besprechung von Fragen der Plastizitätstheorie gewidmet war, sind zwölf Vorträge gehalten worden. Der wesentliche Inhalt der einzelnen Vorträge wird im folgenden in kurzen Zusammenfassungen, die von den Vortragenden selbst zur Verfügung gestellt wurden, veröffentlicht.

1. Verformung fester Körper vom Standpunkt der Kristallstruktur.

Von **M. POLANYI** in Berlin.

1. Bei Kristallen, die eine Spaltbarkeit haben, tritt im Zugversuch ein Trennungsbruch entlang der Spaltfläche ein. Die Lage der Reißebene ist verschieden, je nachdem wie das Kristallgitter im Probestück orientiert ist.

Spaltflächen treten als Reißebenen auf: Bei Steinsalz (Würfelfläche)[1], bei Wolfram (Würfelfläche)[2], bei Wismut (Pseudooktaederfläche)[3], bei Zink in flüssiger Luft (Basis- oder Prismenfläche 1. Art)[4].

Bei wechselnder Orientierung ist natürlich das Verhältnis von Normalspannung und Schubspannung in der Reißebene verschieden. Nach (E. Schmid)[5] ist bei Zink und Wismut die Schubspannung ohne Einfluß auf das Eintreten des Trennungsbruches. Er tritt stets bei derselben Normalspannung ein, auch wenn die Schubspannung von Null bis auf den 5 fachen Wert der Normalspannung gesteigert wird.

Jede Kristallfläche hat demnach eine charakteristische Reißfestigkeit, die durch eine Normalspannung gegeben ist. Die Reißfestigkeiten sind bei Zink für die beste Reißfläche (Basis) und die zweitbeste (Prisme 1. Art) sehr verschieden. Sie verhalten sich nach Schmid (l. c.) wie 1 : 10.

2. Diese sehr verschiedene Reißfestigkeit kristallographisch ungleichwertiger Kristallflächen ist keine Sondererscheinung, sondern muß allgemein angenommen werden zur Erklärung für das Auftreten kristallographisch bevorzugter Reißebenen (Spaltflächen). Die bisherige Erfahrung spricht also in dem Sinne, daß einzelne, mit Atomen besonders dicht besetzte Ebenen ein sehr ausgesprochenes Minimum der Reißfestigkeit haben. Entlang anderer Ebenen oder gar gekrümmter Flächen hat der Kristall ein Vielfaches an Festigkeit.

Das hängt damit zusammen, daß die Reißfestigkeit der Spaltflächen weit geringer ist als die aus der Oberflächenspannung (des geschmolzenen Metalls) berechenbare Reißfestigkeit. Sie beträgt bei Zink in der Basis mit 0,18 kg/mm^2 etwa den 5000-sten Teil der theoretischen, die man auf 1000 kg/mm^2 schätzen kann[6].

A. A. Griffith[7] konnte durch die Annahme von $^1/_{1000}$ mm langen Spalten erklären, daß die Festigkeit des Glases nur 10 kg/mm^2 ist, statt der theoretischen 1000 kg/mm^2. Wollte man seine Theorie auf Zink-Einkristalle anwenden, so müßte man in der Basisfläche Spalte von etwa 1 cm Länge annehmen. Die Spalte in der Prismenfläche müßten gerade 100 mal kürzer sein, als die in der Basis.

Hier liegt eine Schwierigkeit vor, die noch größer erscheint, wenn man die Umstände beachtet, die zu einer Erhöhung der Reißfestigkeit führen.

---

[1] W. Voigt, Ann. d. Phys., Bd. 48, S. 636 (1893).
[2] van Arkel, Physica Niederl. Zeitschr. f. Naturkunde (1922).
[3] M. P. u. E. Schmid, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., Bd. 25 (1923).
[4] H. Mark, M. P. u. E. Schmid, Zeitschr. f. Phys., Bd. 12, S. 60 (1922).
[5] Verh. d. intern. Kongr. f. angew. Mech., Delft 1924.
[6] Vgl. G. Masing u. M. P. Erg. d. exakt. Naturw., Bd. 2, S. 177 (1923).
[7] Phil. Traus (A) 221, 163 (1920). Vgl. auch Verh. d. Intern. Kongr. f. angew. Mechanik, Delft 1924.

a) Polykristallines Zink ist weit fester als der Einkristall. Grobkörniges hat 3 bis 5 kg/mm², feinkörniges 13 bis 18 kg/mm² Festigkeit [1]).

b) Kaltbearbeitung steigert diese Festigkeit bis zu 50 kg/mm² [2]). (Steigerung auf das 10 fache findet A. Joffe [3]) bei Reckung von Steinsalz.)

3. Auch das Gleiten findet in Kristallen entlang bestimmter Ebenen (und zwar nur nach bestimmten Richtungen) statt. Auch die Gleitebenen sind dichtbesetzte Kristallflächen, die zuweilen (bei Wismut und Zink) mit den Spaltflächen übereinstimmen. (Die Gleitrichtung ist stets die dichtest besetzte Gittergerade.) [4])

Bei Zugversuchen an Kristallen mit wechselnder Orientierung fand E. Schmid, (l. c.) daß das Gleiten bei einem bestimmten Wert der Schubspannung einsetzt, auch wenn die Normalspannung sehr verschiedene Werte hat. Die Schubfestigkeiten von Basis und Prisma der Zinkkristalle verhalten sich nach Schmid wie 1 : 6,5. Auch die Schubfestigkeit hat also in gewissen Kristallflächen sehr bevorzugte Minimalwerte.

Die Streckgrenze wird durch dieselben Umstände (Körnigkeit, Kaltbearbeitung) und in ähnlichem Maße gesteigert, wie die Reißfestigkeit [5]). Außerdem wirken auf die Streckgrenze auch geringe Legierungs-Beimengungen stark erhöhend.

4. Die Verwandtschaft zwischen Gleiten und Reißen wird durch analoge theorethische Schwierigkeiten noch unterstrichen.

Entlang der Gleitfläche muß während des Gleitens die normale Anordnung der Atome zumindest vorübergehend, bis zur Erreichung der nächsten kristallographisch zulässigen Lage, aufgehoben werden. Hierzu ist ein bestimmter Arbeitsaufwand (ε) nötig [6]), dessen obere Grenze gegeben ist durch das Produkt der in der Gleitfläche wirkenden Schubspannung (τ^*) und der Strecke, die zwei benachbarte kristallographisch zulässige Lagen in der Schubrichtung trennt. Diese Strecke (Identitätsperiode in der Schubrichtung) ist etwa 10^{-8} cm lang. Es gilt also $\varepsilon < \tau^* . 10^{-8}$.

Nimmt man nun an, das τ^* durch die Schubfestigkeit τ der Gleitfläche gegeben ist, so kommt man auf unmöglich kleine Werte von ε: Für Zink in der Basis ist nämlich nach E. Schmid $\tau \sim 30$ g/mm² woraus $\varepsilon < 3 . 10^{-5}$ *CGS* folgen würde. Da die Oberflächenspannung von flüssigem Zink etwa $4 . 10^{2}$ *CGS* beträgt, so hieße das, daß man die Gleitebenen übereinander wegschieben kann, ohne mehr als den 10^{-7}-ten Teil der Trennungsarbeit zu leisten. Da eine elementare Betrachtung des Gitters zeigt, daß dies nicht der Fall sein kann, so ergibt sich auch hier das Problem lokaler Anhäufungen der Spannungsenergie genau wie beim Reißen [7]).

Wir können das gewonnene Bild dahin zusammenfassen, daß das Reißen und Gleiten in Kristallen unter lokaler Anhäufung von Spannungsenergie vor sich geht. Diese Anhäufung geht im allgemeinen um so leichter vor sich, je dichter belegt die betreffenden Kristallebenen sind. Störungen des Kristallbaues hindern die Anhäufung der Energie und steigern sowohl die Reißfestigkeit als auch den Gleitwiderstand.

---

[1]) G. Masing u. M. P. Zeitschr. f. Phys., Bd. 28, S. 169 (1924).

[2]) G. Masing u. M. P. l. c. sowie noch unveröffentlichte Versuche von G. Sachs.

[3]) Zeitschr. f. Phys., Bd. 22, S. 286 (1924), sowie W. Ewald und M. P. Zeitschr. f. Phys., Bd. 28, S. 29 (1924).

[4]) Literatur z. B. bei G. Sachs, Grundlagen der Mech. Technologie der Metalle. Leipzig 1925.

[5]) Einen Vergleich ermöglichen die erwähnten noch unveröffentlichten Versuche von G. Sachs. (Material: Zink.)

[6]) Daraus folgt, daß Einkristalle, zumindest bei tiefen Temperaturen, eine scharfe Elastizitätsgrenze besitzen.

[7]) Würde die mittlere Schubspannung ausreichen, um die Schubfestigkeit der Gleitfläche zu überwinden, so müßte der Schubmodul in der Gleitfläche vor Einsetzen des Gleitens abnehmen und für den Beginn der Gleitung zu Null konvergieren. Genau so wie der Elastizitätsmodul eines Körpers mit idealer Reißfestigkeit für den Punkt, wo das Reißen eintritt, zu Null abfallen müßte. In Wirklichkeit stimmt bis zum Einsetzen des Gleitens das Hookesche Gesetz ebenso wie bis zum Einsetzen des Reißens. Auch von diesem Standpunkte bieten also Reißen und Gleiten analoge theoretische Schwierigkeiten.

2. Verfestigung und Entfestigung.

Von G. SACHS in Berlin.

Die plastische Verformung von Kristallen und kristallinen Aggregaten ist — wahrscheinlich ausnahmslos — mit Aenderungen der Eigenschaften solcher Stoffe verbunden. Am auffälligsten tritt die Veränderung der mechanischen Eigenschaften, die »Verfestigung« des Stoffes, in Erscheinung. Jedoch sind die Eigenschaftsänderungen nur bei verhältnismäßig tiefen Temperaturen beständig, während bei höheren Temperaturen der Stoff das Bestreben zeigt, seine ursprünglichen Eigenschaften vor der Verformung allmählich zurückzugewinnen. Verformungen bei Temperaturen, bei denen dieses Bestreben nicht merklich ist, sind die im folgenden allein besprochenen »Kaltverformungen«, Verformungen bei höheren Temperaturen heißen »Warmverformungen«.

1. Das Hauptmerkmal der durch bleibende Verformung bewirkten Zustandänderung des Stoffes ist der mit zunehmender Verformung wachsende Widerstand gegenüber weiterer Verformung (»Formverfestigung«).

Eine solche Erhöhung braucht nicht notwendig auf einer Eigenschaftsänderung des Stoffes zu beruhen. Wird als Bezugsgröße etwa die nach den Lehren der Elastizitätstheorie unter Berücksichtigung etwaiger Querschnittsänderungen berechnete größte Normalspannung gewählt, so ist eine wirkliche oder scheinbare Erhöhung dieser Größe durch Verformung im allgemeinsten Falle auf dreierlei Weise vorstellbar:

Die Verformung von Kristallen geht durch Gleitungen von Kristallteilen auf kristallographischen Flächen vor sich, die sich gegenüber dem äußeren Kraftfeld drehen[1]). Hierbei stellen sich im einfachsten Falle, d. h. bei Gleitungen auf einem singulären Gleitflächensystem, Gleitfläche und Gleitrichtung so ein, daß ihr Winkel zur Hauptverformungsrichtung, also zur größten Hauptspannung, immer kleiner wird. Im Bereich stärkerer Verformungen würde daher bei konstanter Schubspannung in den Gleitflächen die größte Hauptspannung mit fortschreitender Verformung ständig anwachsen. Diese »Orientierungsverfestigung« tritt jedoch selbst bei Kristallen geringer Symmetrie bei niedrigen Verformungen nur dann ein, wenn die Gleitfläche von vornherein einen kleineren Winkel als 45^0 mit der größten Hauptspannung einschließt. Bei höhersymmetrischen Kristallen, bei denen sich mehrere Gleitebenensysteme abwechselnd betätigen[2]), scheint eine Orientierungsverfestigung in der Regel kaum einzutreten.

Bei inhomogen verformten Körpern ist weiterhin eine Erhöhung der Tragfähigkeit über die aus der Annahme rein elastischer Formänderungen berechnete zu erwarten, wenn Teile des Körpers plastisch verformt werden[3]).

Bei gebogenen Steinsalzkristallen ist nach Versuchen von Polanyi und mir eine plastisch verformte Schicht an der Zugseite nachweisbar. Ablösen der Oberflächenschicht an der Zugseite im entlasteten Zustande führt zu Rückbiegungen. Eine Tragfähigkeitserhöhung bei Anwesenheit eines elastischen Kerns ist jedoch nach der Theorie einseitig und müßte bei Umkehrung des Vorzeichens der Beanspruchung bei um so niedrigeren Kräften wieder zu plastischen Verformungen führen, je höher die Tragfähigkeitserhöhung vorher war. Tatsächlich ist diese Erniedrigung bisher nicht sicher beobachtet worden, wohl infolge des Umstandes, daß die wirkliche Materialverfestigung diesen Effekt mindestens aufhebt[4]).

Die eigentliche Eigenschaftsänderung, die wir von den beiden zuvor geschilderten Effekten loslösen müssen, ist die mit dem Betrage der Verformung zunehmende Erhöhung der Gleitspannung, die »Kristallverfestigung« [5]). Die Widerstandserhöhung bei der Ver-

---

[1]) W. v. Moellendorf und J. Czochralski ZVDI., Bd. 57 (1913), S. 931 bis 935; H. Mark, M. Polanyi u. E. Schmid. ZPhys., Bd. 12 (1922), S. 58 bis 116; vgl. Ber. Exakt. Naturw., Bd. 2 (1923), S. 177 bis 245.

[2]) G. J. Taylor u. C. F. Elam, Proc. Roy. Soc., Bd. 102 A (1923) 643 bis 647; F. S. Goucher. Phil Mag., (6) Bd. 48 (1924) S. 229 bis 249, 800 bis 819.

[3]) Bach, Elastizität und Festigkeit. Haar u. Th. v. Kármán, Nachr. K. Ges. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl. (1909), S. 204 bis 218. Hencky, ZAngew. Math. Mech., Bd. 4 (1924) S. 323 bis 334.

[4]) J. Bauschinger, Zivilingenieur, Bd. 27 (1881) S. 299 bis 348. Mitt. Mech. Techn. Labor, München H. 13 (1886); P. Ludwik u. R. Scheu, ZVDI., Bd. 67 (1923) S. 122 bis 126, ZMet., Bd. 15 (1923) S 68 bis 73. Bei Steinsalzkristallen: W. Ewald u. M. Polanyi, ZPhys., Bd. 31 (1925) S. 139 bis 144.

[5]) M. Polanyi u. E. Schmid, Ber. D. Phys. Ges., Bd. 4 (1923), vgl. G. Masing u. M. Polanyi, Erg. Ex. Naturw. Bd. 2 (1923), S. 177 bis 245.

formung von Zinkkristallen auf den mehr als 20fachen Betrag ist nach Schmid (1924)[1]) zum weitaus größten Teil auf eine solche Erhöhung der Gleitspannung zurückzuführen.

Die quantitative Kennzeichnung der Kristallverfestigung erscheint vorläufig nicht möglich, da sie eine gerichtete Größe von kompliziertem Charakter ist (s. Vortrag v. Schmid).

Bei Aggregaten gleichen sich jedoch anscheinend diese Unterschiede statistisch aus, so daß nach Ludwik (1909)[2]) die Gleitverfestigung skalar und unabhängig vom Verformungszustande als Funktion der größten spezifischen Schiebung angenommen werden kann.

2. Kaltverformung bewirkt nicht nur eine Erhöhung des Gleitwiderstandes, sondern auch eine — von dieser durchaus zu unterscheidende — Erhöhung des Widerstandes gegen den Trennungsbruch, eine »Reißverfestigung« (s. Vortrag v. M. Polanyi).

3. Kaltverformung bewirkt in der Regel auch ein Spröderwerden der Stoffe[3]).

4. Gehen wir dazu über, die Veränderungen der Röntgenstruktur zu betrachten, die nach Kaltverformungen eintreten, so müssen wie bei der Formverfestigung zunächst die Folgen der Orientierungsänderung und inhomogenen Verformung betrachtet werden[4]). Die Orientierungsänderung hat beim Einkristall eine Drehung des Untersuchungsobjektes gegenüber dem Röntgenstrahl um einen einmaligen bestimmten Betrag zur Folge. Beim Vielkristall führt die Orientierungsänderung, da sie ausnahmslos nach wenigen ausgezeichneten Richtungen hinstrebt, zu symmetrischen Anordnungen der Gitterlagen, zu einer »Deformationsstruktur«[5]).

Inhomogene Verformung bewirkt eine Drehung der verschiedenen Teile des verformten Stabes gegeneinander. Es zeigt sich nun, daß auch bei homogener Verformung die Struktur der Kristalle Veränderungen erleidet, die denen bei inhomogener Verformung ähnlich sind und als Biegungen gedeutet werden können[6]). Nicht nachgewiesen ist dagegen bisher eine Veränderung der Gitterkonstanten, die über das Maß möglicher elastischer Verzerrungen bei dem betreffenden Stoff hinausgeht[7]).

5. Die Instabilität des verformten Zustandes äußert sich in irreversiblen Aenderungen der Eigenschaften bei Temperaturbewegungen nach höheren Temperaturen hin, die den durch Kaltverformung bewirkten entgegengesetzt sind, in einer »Entfestigung«. Die Entfestigung beim Erwärmen eines verformten Kristalls kann entweder ohne äußerlich nachweisbare Veränderungen (»Erholung«) vor sich gehen oder mit der Bildung neuer, anders orientierter Kristalle verbunden sein.

Eine solche Neuordnung der Kristallstruktur, eine »Rekristallisation«, muß die Entfestigung begleiten, wenn die Teile des verformten Kristalls größere Orientierungsunterschiede zueinander aufweisen, also z. B. bei einem einseitig gebogenen oder tordierten Kristall. Denn, da ein plastisch verformter Körper erfahrungsgemäß bei Temperaturerhöhung nicht seine Gestalt vor der Verformung wiedergewinnen kann, können sich die einzelnen Teile eines verformten Kristalles nur durch Bildung von Gitterbereichen parallel stellen, die teilweise anders orientiert sind, als der ursprüngliche Kristall[8]). Makroskopisch gleiche Orientierung im verformten Kristalle ist also eine notwendige, aber wie die Erfahrung lehrt, nicht ausreichende Bedingung für eine Erholung von Kristallen ohne Rekristallisation.

Bei Aggregaten ist eine starke Entfestigung ohne Rekristallisation (Erholung) nicht nachgewiesen.

Die Dynamik der Entfestigung gehorcht den gleichen Gesetzen wie die Dynamik plastischer Verformungen[9]).

---

[1]) ZPhys., Bd. 22 (1924), S. 328 bis 333.

[2]) Elemente der Technologischen Mechanik, Berlin 1909; vgl. G. Sachs, Grundbegriffe d. Mechanischen Technologie der Metalle, Leipzig 1925.

[3]) P. Ludwik, ZVDI., Bd. 63 (1919), S. 142 bis 144.

[4]) E. Schiebold, ZMet., Bd. 16 (1924), S. 417 bis 425, 462 bis 481.

[5]) M. Polanyi, Naturw. Bd. 9 (1921), S. 288; H. Mark, ZKrist., Bd. 61 (1925) S. 75 bis 91.

[6]) H. Mark, M. Polanyi u. E. Schmid, ZPhys., Bd. 12 (1922), S. 58 bis 116; F. Rinne, ZKrist., Bd. 59 (1923), S. 230 bis 248; F. S. Goucher, Phil. Mag. (6), Bd. 48 (1924), 229 bis 249, 800 bis 819; R. Gross, ZMet., Bd. 16 (1924), S. 344 bis 352.

[7]) G. Tammann, Metallographie 3. A. 1923.

[8]) G. Masing u. M. Polanyi, Erz. Exakt Naturw., Bd. 2 (1923), S. 177 bis 245; vgl. ZMet., Bd. 16 (1924), S. 104 bis 107. M. Polanyi, ZMet Bd. 17 (1925), S. 94 bis 95.

[9]) G. Sachs, Mechn. Technologie der Metalle, S. 222.

6. Mit dem rein kristallographischen Verformungsmechanismus, d. h. der Gleitung starrer Gitterpartien unter gleichzeitiger Drehung zur Hauptverformungsrichtung, lassen sich die beschriebenen Eigenschaftsänderungen nicht kausal verknüpfen. Um diese zu verstehen, müssen die elastischen Beanspruchungen herangezogen werden, die die Gitterteile während des Verformungsvorganges erleiden. Mügge weist schon 1898 darauf hin [1]), daß die gleitenden Gitterteile einerseits Biegungen erleiden, andererseits starken Schubspannungen in den Gleitflächen ausgesetzt sind.

Die mit Biegung der Gleitschichten verbundene Gleitung (»Biegegleitung«) erscheint insbesondere nach den Untersuchungen Polanyis und seiner Mitarbeiter [2]) der allgemeine Verformungsmechanismus plastischer Kristalle zu sein. Jedenfalls gestattet die reine Gleitung einem Kristall nur einen Bruchteil der Deformationsmöglichkeiten, die er tatsächlich besitzt.

7. Vom kristallographischen Gesichtspunkt müssen daher auch nach der Entlastung in einem verformten Stoff Krümmungen, die als »Fältelungen«, »Knüllungen« usw. von zahlreichen Forschern beschrieben worden sind, zurückgeblieben sein. Vom energetischen Gesichtspunkt aus finden wir in einem verformten Stoff einen turbulenten, nach statistischen Gesetzen veränderlichen Spannungszustand [3]) vor, dessen Extremstellen sich längs der Gleitflächen, beim Aggregat auch besonders längs der die Gleitung behindernden Korngrenzen anhäufen.

Die Ursache der Verfestigung ist dann hauptsächlich in der Erschwerung der Gleitbewegung durch die Verkrümmung der Gleitflächen zu suchen [4]). Welche Rolle die Trennungsflächen zwischen den Gleitschichten spielen und wie sie beschaffen sind, ist noch gänzlich ungeklärt.

Die mechanische Erweichung und Rekristallisation beruhen dann auf dem bei Temperaturerhöhung vor sich gehenden Angleiche dieser Spannungen. Ihre Gesetzmäßigkeiten [5]) lassen sich verstehen, wenn man die Annahmen macht, daß mit zunehmender Verformung sich einerseits die Anzahl, andererseits die Absolutwerte der für die Verformung ausschlaggebenden Spannungsfunktion erhöhen. Die Rekristallisation setzt nämlich bei um so niedrigeren Temperaturen ein und bewirkt ein um so feineres Korn, d. h. Aufteilung in praktisch gleich orientierte Gitterbereiche, je höher der Verformungsgrad ist.

8. Kristalle und kristallinische Aggregate verhalten sich in bezug auf die Verfestigung gleichartig. Die Verformung eines Aggregates ist jedoch sicher viel ungleichmäßiger als die eines Kristalls, und zwar umso mehr, je weniger Bewegungsfreiheit der einzelne Kristall hat. Die Verfestigungswirkung einer bestimmten Verformung ist daher, besonders bei Stoffen geringer Symmetrie wie Zink, auf das Aggregat viel größer als auf den Kristall [6]). Andererseits wird wahrscheinlich die Elastizitätsgrenze eines Aggregates infolge der ungleichmäßigen Spannungsverteilung unterhalb der mittleren Elastizitätsgrenze seiner Körner, ja u. U. bei sehr niedrigen Spannungen liegen.

9. Zum Schluß sei noch erwähnt, daß auch die Legierungshärtung, d. h. die Härtung von Metallen durch Zusätze, die sie in fester Lösung aufnehmen, auch auf Verkrümmungen der Gleitflächen infolge des Eintritts fremder Atome in das Gitter zurückgeführt werden kann.

3. Über die Konkurrenz verschiedener Gleitsysteme bei der plastischen Kristalldeformation.

Von **E. SCHMID** in Berlin-Dahlem.

Es werden Versuchsergebnisse über die Wirksamkeit mehrerer Gleitsysteme bei der plastischen Dehnung von Einkristallen mitgeteilt. Die Dehnung von *Zn*-Kristallen liefert zunächst in der »Hauptdehnung« ein Beispiel für die Konkurrenz zweier kristallographisch ungleichwertiger Gleitflächen. Diese Hauptdehnung geht durch Basisabgleitung

[1]) Jahrb. Min. (1898, I), S. 71 bis 159.
[2]) Vgl. Note 1.
[3]) E. Heyn, Met. Erz., Bd. 15 (1918), S. 411 bis 422, 436 bis 441; vgl. ZVDI., Bd. 62 (1918) 499; G. Masing, ZMet., Bd. 12 (1920), S. 457 bis 498; Bd. 16 (1924), S. 257 bis 264, 301 bis 308.
[4]) P. Ludwik, ZVDI., Bd. 63 (1919), S. 142 bis 144.
[5]) C. Chappell, Ferrum, Bd. 13 (1915/16), S. 6 bis 27; vgl StEisen, Bd. 34 (1914), S. 847 bis 849; J. Czochralski, Int. ZMet., Bd. 8 (1916), S. 1 bis 43; Met Erz., Bd. 13 (1916), S. 381 bis 393.
[6]) M. Polanyi und E. Schmid, ZTechn. Phys. Bd. 5 (1924), S. 580 bis 589.

vor sich, die schließlich von Prismengleitung abgelöst wird. Ein Beispiel für kristallographische Gleichheit beider Flächen ist die »Nachdehnung« des *Zn*-Kristalles. Sie erfolgt durch Abgleitung entlang einer Prismenfläche 1. Art, welche bis zur Ausbildung der Gleitung entlang einer zweiten Prismenfläche 1. Art wirksam bleibt. Die Versuche zeigen, daß sich im Falle kristallographischer Verschiedenheit von wirkender und latenten Gleitflächen bei gewöhnlicher Temperatur die in Wirksamkeit befindliche, dichter belegte Basisgleitfläche stärker verfestigt, als die sie durchschneidende Prismenfläche 1. Art. Die Verfestigung der Basisfläche überwiegt um so mehr, je rascher die Dehnung erfolgt. Für den Fall kristallographischer Gleichwertigkeit der möglichen Gleitflächen zeigen die Versuche an *Zn*-Kristallen, daß sich die wirkende ungleich geringer verfestigt, als die latente. Dieses letztere Verhalten wird auch für ein Gleitsystem des *Sn*-Kristalles (Gleitfläche (100), Gleitrichtung [011]) nachgewiesen.

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Verfestigung der Kristalle durch Kaltreckung keineswegs immer eine gleichartige, alle Kristallflächen in demselben Maße treffende ist (wie sie angenähert beim *Al*-Kristall nach dem Versuch von Taylor und Elam auftritt). Bei kristallographischer Gleichwertigkeit der Gleitflächen ist bisher niemals beobachtet worden, daß sich die gleitende stärker verfestigt als die latente. Auf die Rolle, welche die Kristallerholung für diese Vorgänge spielt, wird hingewiesen.

4. Das räumliche Problem der Schneidenfestigkeit plastischer Stoffe und das Dehnungsgesetz im unelastischen Druckbereich.

Von **W. GEHLER** in Dresden.

I. Die grundlegende Arbeit von Herrn Prandtl über das ebene Problem der Schneidenfestigkeit (s. 1921, S. 15 der Zeitschrift) regte mich dazu an, durch Versuche einen Beitrag für spröde Stoffe zu liefern (s. Bauingenieur 1922, Heft 14 u. 15), sowie eine Näherungslösung für das räumliche Problem (Kegelfestigkeit) unter den gleichen, stark vereinfachenden Voraussetzungen zu erörtern. Vor allem drängte sich die Frage auf, ob die von Herrn Prandtl gefundene lineare Beziehung $\sigma_s = \sigma_Q\,(1+\vartheta)$ auch für das räumliche Problem angenähert gilt. (σ_s = Schneidenpressung, σ_Q = Quetschgrenze, $2\,\vartheta$ = Schneidenwinkel nach Abb. 1). Infolge der Vernachlässigung der Formänderungen wird die Aufgabe statisch bestimmt. Die hier hinzutretenden Ringspannungen können zu Resultierenden zusammengesetzt werden, die wie die anderen Vektoren in den Meridianebenen liegen. Damit ergibt sich ein ebenes statisches Problem, das durch je 3 Gleichgewichtsbedingungen für die drei von Herrn Prandtl unterschiedenen Zonen gelöst werden kann. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind aber deshalb nicht befriedigend, weil die Größe der Pressungen σ_s an der Druckfläche für einen bestimmten, zwischen 170° und 180° liegenden Wert des Schneidenwinkels $2\,\vartheta$ durch das Unendliche springt. Für Winkel von $2\,\vartheta = 0°$ bis 135° und für $2\,\vartheta = 180°$ können zwar befriedigende Werte σ_s dann berechnet werden (die von der Prandtlschen linearen Funktion $\sigma_s = \sigma_Q\,(1+\vartheta)$ um höchstens 10 vH abweichen), wenn man außer der üblichen Plastizitätsbedingung τ = const noch die Begrenzung der Ringspannungen durch die Mohrsche Grenzkurve im Zugbereich annimmt. Die Ursache der sich hier zeigenden Unzulänglichkeit bei Uebertragung des Prandtlschen einfachen Rechnungsweges auf das räumliche Problem liegt offenbar in der Vernachlässigung der Formänderungsbedingungen, die hier die unerläßlichen Kompatibilitätsgleichungen der in Wirklichkeit statisch unbestimmten Aufgabe liefern. Bevor hierfür eine exakte Lösung gefunden ist, die aber wohl kaum die Verfestigung wird berücksichtigen können, empfiehlt sich der Weg des Versuches, bei dem hier für Baustahl St. 48 und für Flußstahl Normalgüte St. 37 im Vergleich mit der Prandtlschen Beziehung $\sigma_s = \sigma_Q\,(1+\vartheta)$ folgende Werte für σ_s in kg/cm² nach dem unten angegebenen Verfahren gemessen wurden:

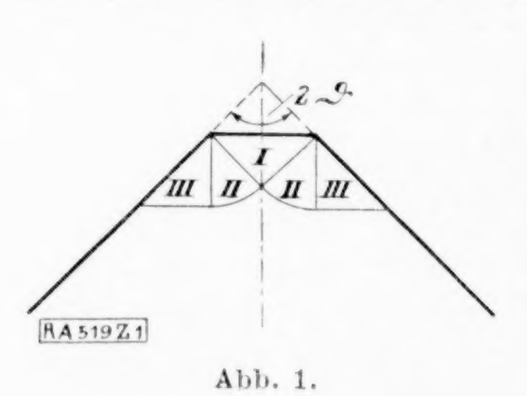


Abb. 1.

2ϑ	Baustahl St. 48					Flußeisen St. 37				
	0^0	45^0	90^0	135^0	180^0	0^0	45^0	90^0	135^0	180^0
$\sigma_s = \sigma\,(1 + \vartheta)$	3550	4950	6340	7730	9130	2400	3360	4300	5230	6190
Gemessen	3550	5090	6540	7970	8780	2400	3650	4440	5140	6280
	—	5120	6820	8060	9130	—	3770	—	—	6340
Abweichung in H. T .	—	+2,8	+3,2	+3,1	−3,8	—	+ 8,6	+3,3	−1,7	+1,4
	—	+3,4	+7,6	+4,3	0	—	+12,2	—	—	+2,4

Die Abweichungen sind etwa von der gleichen Größenordnung wie bei den Nádaischen Schneidenversuchen (1921, S. 20 dieser Zeitschrift). Man darf wohl hiernach mit der gleichen Berechtigung, wie für die Schneiden, erhoffen, daß auch für die Kegel im Augenblicke der Erreichung der Fließgrenze die lineare Prandtlsche Beziehung zwar nur als erste, aber doch praktisch wertvolle Annäherung gilt.

II. Da der Beginn des Auftretens von Fließfiguren, wie ihn Herr Nádai an den ebenen Schneiden feststellen konnte, an den gekrümmten Kegelflächen kaum scharf erkennbar ist und überhaupt nur bei gewissen Eisensorten genau beobachtet werden kann, wurden die Messungen mit Martensschen Spiegeln durchgeführt. Die gemessene Eindringungstiefe Δh ist für die beiden genannten Stahlsorten in Abb. 2 als Funktion

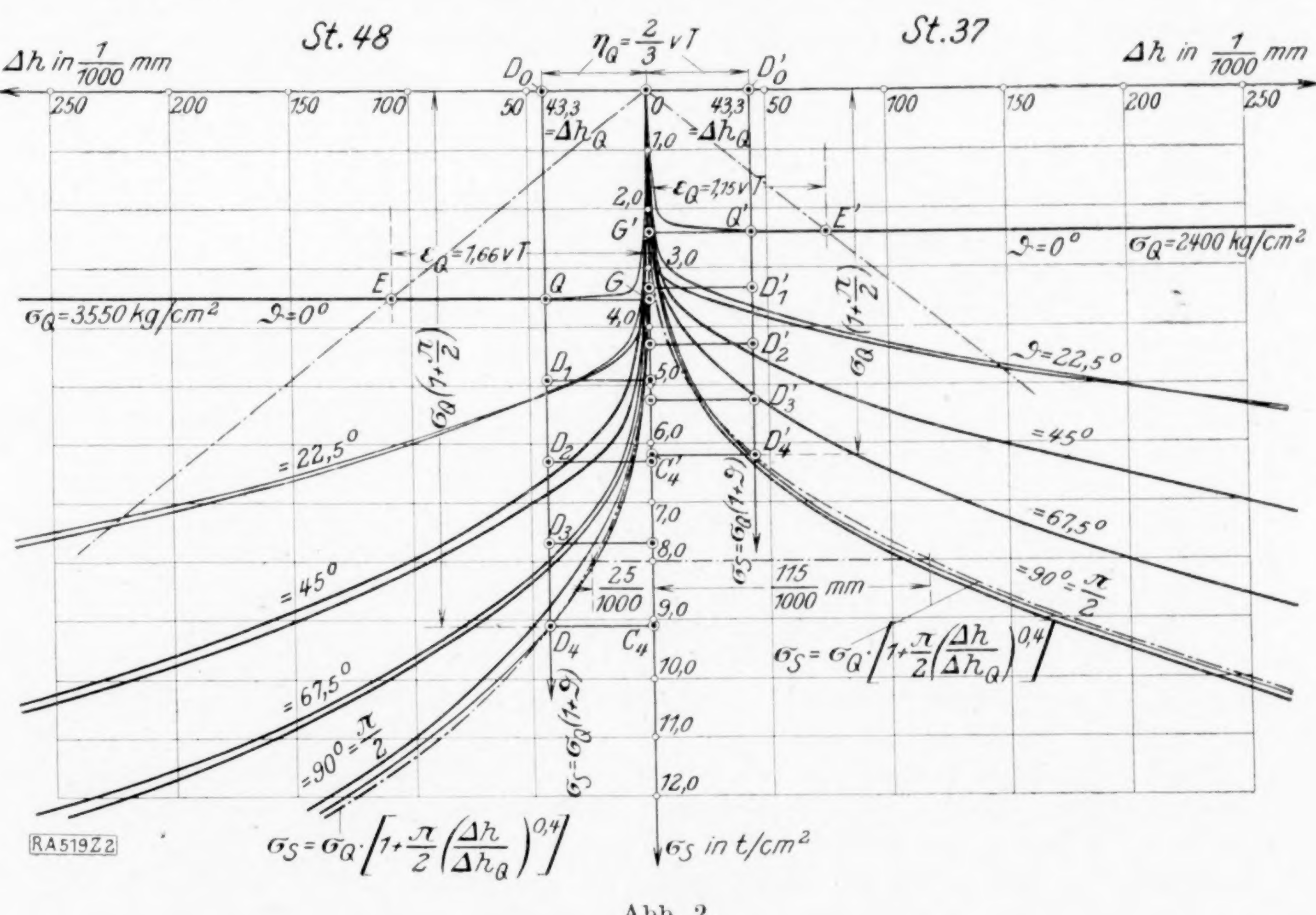


Abb. 2.

der Pressung σ_s aufgetragen. Während die Linien für St. 48 wie üblich im Druckquadranten dargestellt sind, wurden sie für St. 37, um Ueberdeckungen zu vermeiden, um die σ-Achse nach rechts herumklappt. Für beide Baustoffe ist die wagerechte Linie der Quetschgrenze ($\vartheta = 0$) mit $\sigma_Q = 3550$ bzw. $2400\ \mathrm{kg/cm^2}$ deutlich erkennbar. Trägt man auf der σ-Achse den Wert $\sigma_s = \sigma_Q\,(1 + \pi/2)$ als OC_4 bzw. OC'_4 auf und zieht die Wagrechte durch C_4 und C'_4, bis sie jeweils das Kurvenbündel für $\vartheta = \pi/2$ in D_4 bzw. D'_4 trifft, so erhält man die Abszisse $C_4\,D_4 = \Delta h_Q$ dieser Punkte. Der Schnittpunkt Q bzw. Q' der Ordinate $D_0\,D_4$ mit der Linie $\vartheta = 0$ wird nun als Quetschgrenze Q bzw. Q' angenommen und nachträglich die Berechtigung dieser Annahme auf Grund der bisher bekannten und der hier durchgeführten Versuchsergebnisse nachgewiesen. Diese Darstellung in Abb. 2 läßt folgendes erkennen:

1. Die Eindringungstiefe $\varDelta h_Q$ an der Quetschgrenze darf für beide Stoffe zu $43{,}3 \cdot 10^{-3}$ mm angenommen werden. Hieraus berechnet sich bei einer Meßlänge von 65 mm als bleibende Dehnung an der Quetschgrenze $\eta_Q = \varDelta h_Q / 65 = {}^2/_3$ vT.

2. Zählt man zu diesem Werte die auf der Linie $\vartheta = 0$ durch die Hookesche Gerade OE bzw. OE' abgeschnittene elastische Dehnung GE bzw. $G'E'$ an der Quetschgrenze $\varepsilon_Q = \sigma_Q : E = 1{,}66$ vT bzw. 1,15 vT hinzu, so ergibt sich für St. 48 als Gesamtdehnung 2,33 vT und für St. 37 1,82 vT. Als üblicher Mittelwert der Gesamtdehnung an der Fließgrenze wird bekanntlich für die verschiedenen Eisen- und Stahlsorten 2 vT angegeben, was mit diesen Werten befriedigend übereinstimmt.

3. Teilt man auf der Ordinate $D_0 D_4$ die Strecke QD_4 bzw. $Q'D_4'$ in 4 gleiche Teile c, so erkennt man, daß die Teilpunkte D_1, D_2, D_3 bzw. D'_1, D'_2, D'_3 diejenigen sind, die der Prandtlschen Beziehung $\sigma_s = \sigma_Q (1 + \vartheta)$ entsprechen sollen. Ihre Ordinaten sind in der obigen Uebersicht eingetragen und bereits erörtert worden.

4. Für die Linien der Abb. 2 läßt sich dann die Gleichung:

$$\sigma_s = \sigma_Q \left[1 + \vartheta \left(\frac{\varDelta h}{\varDelta h_Q} \right)^x \right]$$

aufstellen, die für $\vartheta = 0$ den Wert $\sigma_s = \sigma_Q$ ergeben muß und für $\varDelta h = \varDelta h_Q$ die Prandtlsche lineare Beziehung. Wählt man im Falle des »Stempeldruckes« $(\vartheta = \pi/2)$ den Exponenten $x = 0{,}4$, so erhält man die für beide Baustoffe eingetragenen gestrichelten Linien, die sich als eine beiden gemeinsame Funktion den gefundenen Werten gut anschmiegen. Für die übrigen Schneidenwinkel ergibt sich aus den bisherigen Versuchen $x = \dfrac{0{,}35}{\vartheta + 0{,}48} + 0{,}23$

5. Die hiernach für den Stempeldruck erhaltene Beziehung

$$\sigma_s = \sigma_Q \left[1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\varDelta h}{\varDelta h_Q} \right)^{0,4} \right]$$

liefert z. B. für $\sigma_s = 8000$ kg/cm² bei St. 48 als Eindringungstiefe $\varDelta h = 25 \cdot 10^{-3}$ mm, bei St. 37 dagegen $\varDelta h = 115 \,.\, 10^{-3}$ mm, also überraschenderweise den 4,6 fachen Wert, obwohl sich die Werte der Fließgrenzen nur um 50 vH unterscheiden. Unter der Voraussetzung der Bestätigung dieser Feststellung durch die weiteren Versuche besteht die Hoffnung, an Stelle der Kugeldruckprobe eine Stempeldruckprobe einzuführen, um durch einen leicht zu erzeugenden Eindruck an einem Bauteile oder Bauwerke unmittelbar die Streckgrenze σ_Q des Baustoffes zu ermitteln.

III. Die Messungen waren mit umfangreichen Versuchen zur Ermittelung der sogenannten Materialfestwerte verbunden. Das Elastizitätsmaß E wurde wie üblich an Zylindern, deren Höhe h das doppelte bzw. dreifache des Durchmessers d betrug, zu im Mittel 2137000 bzw. 2140000 kg/cm² gefunden, während sich für $h = d$ eine Abweichung von $-2{,}3$ vH, für $h = 4d$ von $+1{,}5$ vH ergab. Die Veränderlichkeit von E sowie die Krümmung der Hookeschen Geraden infolge der Verfestigung bei Kaltbearbeitung konnte an Versuchskörpern bestimmt werden, die bis auf 20 vH ihrer Länge verkürzt wurden. Da bei jedem normalen Druckversuch mit nicht vorbearbeiteten Körpern bekanntlich bereits von Anbeginn bleibende Dehnungen η zu beobachten sind, die bei Erreichung von $\eta = 0{,}03$ vT sichtlich stark anwachsen, empfiehlt es sich, die zu diesem Werte gehörige Laststufe σ_P als »Proportionalitätsgrenze« zu wählen. Das Verhältnis σ_P zu σ_Q ergab sich dann für den hier verwendeten Baustahl St. 48, der von der Linke-Hofmann-Lauchhammer A.-G. stammt, zu im Mittel 92 vH und für St. 37 zu 78 vH. Hieraus folgt, daß bei St. 48 der der üblichen Elastizitätstheorie zugängliche Bereich der Hookeschen Geraden verhältnismäßig weit reicht und der plastische Bereich stark eingeschränkt wird, was für die Nutzanwendung auf das Knickproblem nach Engesser und v. Kármán von Bedeutung ist. Endlich gelang es durch Druckversuche von 12 bis 14 stündiger Dauer, bei denen jeweils die Einstellung des Gleichgewichtszustandes zwischen den inneren und äußeren Kräften abgewartet wurde, möglichst dicht an die tatsächliche Quetschgrenze heranzukommen und als äußersten Wert für die bleibende Dehnung $\eta_Q = {}^2/_3$ vT kurz vor Eintritt des labilen Fließzustandes unmittelbar zu messen, also dieselbe Größe, die nach Abb. 2 ermittelt wurde, womit der Ring der Begründung der an der Hand von Abb. 2 gegebenen Darlegungen geschlossen erscheint.

5. Versuche zur Wertung der Baustoffe auf Grund ihrer Dämpfungsfähigkeit.

Von **O. FÖPPL** in Braunschweig.

Die Dämpfungsfähigkeit eines Baustoffes wird bestimmt aus der Erwärmung, die bei oft wiederholtem Wechsel der Spannung zwischen einem positiven und negativen Maximum — z. B. $+\tau_1$ und $-\tau_1$ — im Beharrungszustand auftritt. Einem solchen Spannungswechsel ist der Baustoff bei Schwingungen unterworfen; bei den hier betrachteten Versuchen sind Drehschwingungen, die ein Versuchsstab mit angehängter Schwungmasse ausführt, zur Anwendung gekommen.

Abb. 1 zeigt die Versuchsanordnung. a ist der Versuchsstab, dessen eines Ende b festgehalten ist und der auf seinem anderen Ende die Schwungmasse c trägt. Die Schwungmasse c führt Verdrehungsschwingungen aus. Der Größtausschlag $\Delta\varphi$ gibt ein Maß für die Größtbeanspruchung τ, die an der Oberfläche des Stabes auftritt. Die Erwärmung des Stabes kann schon bei verhältnismäßig kleinen Ausschlagwinkeln, bei denen die eigentliche Streckgrenze des Baustoffs an keiner Stelle erreicht ist — z. B. bei gehärtetem Stahl bei einem Ausschlagwinkel entsprechend einer Größtbeanspruchung $\tau = 10$ kg/mm² —, festgestellt werden. Wir schließen daraus, daß die Formänderung des Baustoffs schon bei diesen verhältnismäßig kleinen Beanspruchungen nicht mehr rein elastisch erfolgt. Im Beharrungszustand ist die durch innere Reibung erzeugte Wärme gleich der durch den Stab bzw. durch die umgebende Luft abgeleiteten Wärme. Die letztere können wir durch einen Auslaufversuch bestimmen. Wir haben sie für eine Schwingung und, bezogen auf 1 kg Stabgewicht, mit γ [Dimension $\frac{\text{cm/kg}}{\text{kg Schwingung}}$] bezeichnet. Der Wert γ ist vom obengenannten Größtwert τ der bei der Schwingung auftretenden Schubspannung abhängig. Die Art der Abhängigkeit oder $\gamma = f(\tau)$ kann durch den Versuch bestimmt werden.

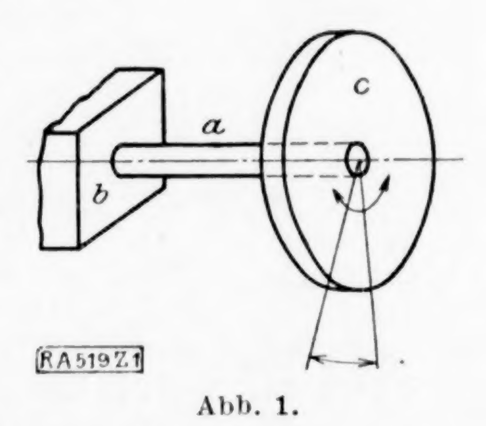


Abb. 1.

Die Dämpfung γ ist gleich dem Inhalt der Hysteresisschleife, die im Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abb. 2) auftritt. Aus der Dämpfung γ kann der plastische Anteil a der Gesamtverformung b berechnet werden. Die praktische Wichtigkeit der Dämpfung liegt darin, daß viele Baustoffe bei erheblichem plastischen Anteil an der Gesamtverformung viele Millionen Belastungswechsel überstehen können, bis sie zu Bruch kommen. So ist z. B. ein Stahl untersucht worden, der bei einem Verhältnis $a/b = 0{,}2$ noch $15 \cdot 10^6$ Schwingungen überstanden hat, bis er entzwei brach. Der Wert γ ist dabei auf die Oberfläche des Stabes bezogen, an der auch die größte Schubspannung τ auftritt.

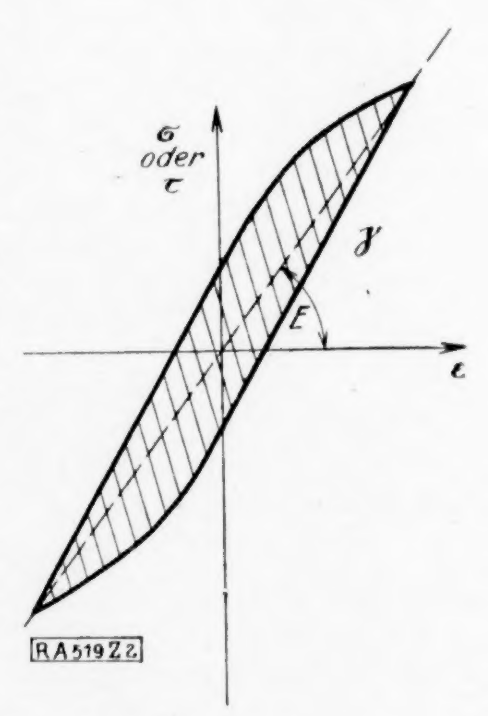


Abb. 2.

Die Dämpfung γ kann ins Verhältnis gesetzt werden zur Formänderungsarbeit A, die in der äußersten Schwingungslage im Baustoff aufgespeichert ist. Dies Verhältnis soll mit ψ bezeichnet werden. ψ ist zugleich ein Maß für den verhältnismäßigen Anteil der plastischen Verformung an der Gesamtverformung. Aus ψ kann deshalb auch die Elastizitätsziffer $E' = \sigma/\varepsilon$ oder bei Schubbeanspruchung $= \tau/\varepsilon$ ermittelt werden, wenn mit ε die Größe der Verformung bezeichnet wird. Für kleine Spannungen τ und damit verbundene kleine Verformungen ε geht E' in den Elastizitätsmodul E bzw. den Schubmodul G über. Bei größeren Verformungen nimmt E' mit der Spannung ab. Die Veränderlichkeit der Elastizitätsziffer mit der Spannung ist dann für die praktische Wertung eines Baustoffs von Bedeutung, wenn örtliche Spannungserhöhungen infolge von Einkerbungen oder Fehlstellen im Baustoff auftreten: An diesen Stellen steigt die Höchstspannung infolge der Veränderlichkeit der Elastizitätsziffer E' nicht so stark an, wie es rechnungsmäßig unter der Annahme eines unveränderlichen Elastizitätsmoduls der Fall

sein müßte. Für die praktische Bewährung eines Baustoffes ist die Beantwortung der Frage wichtig, ob ein Baustoff einen solchen Spannungsausgleich an ausgezeichneten Stellen in millionenfachem Belastungswechsel aushalten kann, oder ob er schon nach wenigen oder wenig Tausenden Belastungswechseln mit plastischem Verformungsanteil zu Bruch geht. Im ersteren Fall haben wir es mit einem zähen — oder vom Dauerversuch aus betrachtet, stark dämpfungsfähigen — Baustoff zu tun. Im letzteren Fall sprechen wir von einem spröden oder wenig dämpfungsfähigen Baustoff.

Für Stahl läßt sich z. B. die Zähigkeit durch folgende Zahlengrößen festlegen: Ein zäher Stahl ist ein solcher, der bei 20 % plastischem Anteil an der Gesamtverformung über 10^7 Belastungswechsel aushalten kann; und ein spröder Stahl ist ein solcher, der bei 1 % plastischem Anteil an der Gesamtverformung schon nach weniger als 10^5 Belastungswechseln zu Bruch kommt.

Eine weitere Güteziffer für die Bewertung des Stahls ist natürlich die Größe der Beanspruchung τ, bei der die 20 % bzw. 1 % plastische Verformung mit den entsprechenden Belastungswechselzahlen überstanden werden.

Zahlenmäßige Angaben zu den obigen Ausführungen für einige hochwertige Baustähle werden in einer der nächsten Nummern der Zeitschrift »Maschinenbau« mitgeteilt werden.

6. Probleme der Geologie, insbesondere der der Salzlagerstätten, die zugleich Probleme der angewandten Mathematik und Mechanik sind.

Von **ERICH SEIDL** in Berlin.

Bemüht man sich, das Schema des Vorgangs geologischer Störungen (auf Grund der Grundriß - Aufnahmen der Tagessituation) durch einfache Linien auszudrücken, so ergibt sich oft eine Anordnung der Linien in geometrischen Figuren. Vielfach ähneln diese denjenigen Figuren, welche sich bei einer in Material-Prüfungsanstalten erzeugten Beanspruchung der in der Technik verwendeten Materialien ergeben haben und deren mathematische Ergründung insbesondere von den Mitarbeitern dieser Zeitschrift in Angriff genommen worden ist. Es liegt daher das Bestreben des Geologen und Bergmanns nahe, die Geometrie der Linienführung in geologischen Störungszonen für die Formulierung eines Ansatzes zu verwenden, der sich mit den Hilfsmitteln der angewandten Mathematik lösen läßt.

Die Erdrinde setzt sich einerseits aus Gruppen von Schichten zusammen, die als spröde bezeichnet werden (z. B. Sandstein- und Kalkschichten) und andererseits solchen, die man als plastisch bezeichnet (Ton- und Salzschichten und das Magma im ersten Stadium der Entlastung) — den Begriff Plastizität bzw. Sprödigkeit natürlich relativ verstanden.

Das Profil Abb. 1 zeigt den sozusagen den Plastizitätsverhältnissen nach inhomogenen Schichtenverband von Mitteleuropa [1]). Im Falle der tektonischen Ueber-



Abb. 1. **Schema des Schichtenverbandes Mitteleuropas.**
B, D spröde reagierende Schichten,
M, S plastisch » » .

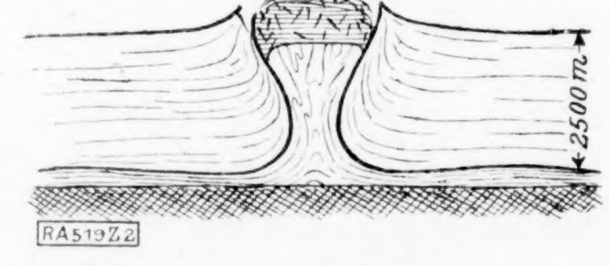


Abb. 2. **Salzstock** bedeckt von einem »Gipshut«.
Querschnitt-Schema einer Salz-Störungszone in der norddeutschen Tiefebene und im Salzkammergut (nördliche Kalkalpen) auf Grund von Bergbau - Aufschlüssen.
(Siehe Abb. 3, Ziff. 2, 3, 4, 5.)

[1]) E. Seidl, Die geologischen Gesetzmäßigkeiten, welche im Hessisch-Thüringischen (Werra-Fulda)-Gebiet für den Zechstein-Kalisalzbergbau maßgebend sein müssen. — Ueber Umformung verschieden-plastischer Schichten durch Translokation und Dislokation in Verbindung mit »tektonisch plastischer Differentiation.« — Dissertationsschrift T. H. Braunschweig 1924; auch Zeitschr. Kali 1924.

Beanspruchung desselben ergeben sich erfahrungsgemäß zwei Gruppen von Reaktionen, die man als plastische oder spröde Reaktionen bezeichnen kann und die sich in einer unterschiedlichen Kurvenform ausdrücken.

Für die Zwecke der mechanischen Berechnung wäre es angezeigt, nur zwischen sozusagen absolut plastisch und absolut spröde reagierenden Schichten zu unterscheiden.

Kurvenform im Falle der „plastischen Reaktion“. Das Profil, Abb. 2, zeigt das Schema eines der Salzstöcke in der norddeutschen Tiefebene, die bekanntlich durch den Kalibergbau in so einzigartiger Weise aufgeschlossen sind. Die gleiche Kurvenform der stockförmigen Salzmasse und der Grenzzone des zerspaltenen Deckgebirges trifft man bei allen — »ausgereiften« — Salzstöcken; die nämliche Kurvenform auch bei den Granitstöcken (wofern sie genügend aufgeschlossen sind), welche den Kern mancher Gebirge (Alpen) bilden.

Erfahrungsgemäß entsteht dies Phänomen bei der Reaktion plastischer Basismassen gegenüber spröden Deckschichten immer in dieser Weise, gleichgültig, welcher Art das Gesteinsmaterial und welcher Art der tektonische Vorgang ist — als Belastung reicht auch schon das Eigengewicht der Deckschichten unter Umständen aus —. Es muß nur genügend plastische Masse vorhanden sein und eine genügende Last ausreichend lange wirken können. Dieser Kurvenform liegt offenbar eine mechanische Gesetzmäßigkeit zugrunde. Die physikalischen Konstanten, die außerdem zu berücksichtigen sind und von dem Geologen angegeben werden können, sind der Plastizitätsgrad und das spez. Gewicht der reagierenden verschiedenartigen Massen, das Gewicht der belastenden Masse und die Art des tektonischen Vorgangs.

Eine Nachahmung des geologischen Vorgangs durch das Experiment ergibt bekanntlich, da die Versuchsapparatur starr, die natürliche »Apparatur« aber in hohem Grade nachgiebig ist, keine ausreichende Anlehnung an die natürlichen Verhältnisse.

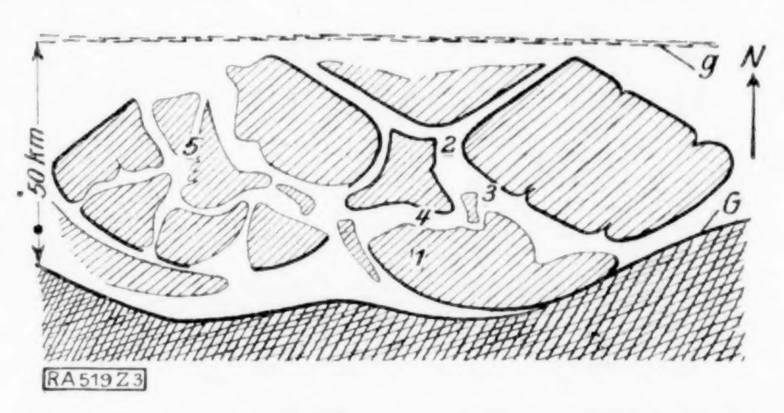


Abb. 3. **Gesetzmäßig zertrümmerte (Kalk-) Schichten-Platte**

(etwa 3000 m dick), die auf Salzmasse (ursprünglich 500 m dick) auflagert und zwischen den Granitmassen der Kernzone (*G*) und der nördlichen schmalen Randzone (*g*) wie zwischen Preßbacken eingespannt ist.

Dachstein-Gebirge *1*; Salzbergwerke von Ischl *2*, Aussee *3*, Hallstatt *4*, Berchtesgaden-Dürnberg *5*.

Kurvenform im Falle der „spröden Reaktion“. Die geologisch so interessante Störungszone des Salzkammerguts zeigt im Grundriß Abb. 3. Die Anordnung der Störungslinien ist augenscheinlich eine analoge wie sie sich bei den bekannten Druckversuchen bei spröden Materialien ergibt.

Die Daten, welche der Geologe außer dieser Linienführung noch zur Verfügung stellen kann, betreffen die Abmessungen der auf dem Salzlager aufruhenden Platte spröder Schichten, die Plastizitätsverhältnisse des Salzes und die Bruchverhältnisse des Deckgebirges.

Das Zerbrechen der Platte nach diesen gesetzmäßig angeordneten Störungslinien ist im vorliegenden Falle vermutlich entweder einer Torsion derselben zuzuschreiben oder dadurch bedingt, daß sie infolge der Durchpressung des zu Granit erstarrenden Magmas in der Kernzone (*G*) und zugleich in der nördlichen schmalen Randzone (*g*) der Alpen wie zwischen zwei Preßbacken eingespannt und über-beansprucht wurde (Profil, Abb. 3).

Den Parallelismus der Druckfiguren spröder Preßkörper mit den bei der plastischen Verformung auftretenden Linien hat Mohr zum erstenmal betont. Die mathematische Behandlung des letzteren Problems bildet bekanntlich eine wichtige Aufgabe, die sich die Mitglieder der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik gestellt haben, wie auch die heutigen Vorträge erkennen lassen.

Möge meine Anregung dazu führen, daß auch geologische Probleme das Interesse der Mitglieder der Gesellschaft finden.

7. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz.

Von **L. PRANDTL** in Göttingen.

I. Die neuen Versuche von Jakob und Erk[1]) über den Widerstand von strömendem Wasser in glatten Rohren, die mit älteren Messungen von Stanton und Pannell[2]) in guter Uebereinstimmung sind, haben mich veranlaßt, meine bisherige Meinung, daß das empirische Blasiussche Gesetz (Widerstand proportional der $^7/_4$ten Potenz der mittleren Geschwindigkeit) bis zu beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen gelten würde, zu ändern. Nach den neuen Versuchen nähert sich der Exponent mit wachsender Reynoldsscher Zahl immer mehr der 2, wobei es noch offen ist, ob ein bestimmter endlicher Grenzwert der Widerstandsziffer λ für $R = \infty$ resultiert oder nicht.

Mit der Aufgabe des Blasiusschen Gesetzes mußten auch die Ueberlegungen fallen, die zu der Beziehung führten, daß die Geschwindigkeit in Wandnähe proportional der siebenten Wurzel aus dem Wandabstand variiert[3]). Es zeigt sich aber, daß man die Grundannahmen, die zu dieser Beziehung führten, auch so verallgemeinern kann, daß sie für jedes empirische Widerstandsgesetz eine Geschwindigkeitsverteilung liefern. Diese Grundannahmen lassen sich so ausdrücken, daß sowohl für das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand wie auch für das der Reibung an der Wand eine solche Form gefunden werden kann, daß der Rohrdurchmesser darin nicht mehr vorkommt; dies bedeutet soviel, daß die Vorgänge in der Nähe einer Wand nicht von der Entfernung der gegenüberliegenden Wand abhängen.

Für die Geschwindigkeit u (zeitlicher Mittelwert) in der Entfernung y von der Wand läßt sich dann nur eine einzige Dimensionslose bilden, nämlich $\frac{uy}{\nu}$ (ν = kinematische Zähigkeit). Man hat dann für u eine Formel von der Form

$$u = C \cdot \varphi\left(\frac{uy}{\nu}\right) \quad \ldots \quad (1)$$

zu erwarten, wo C eine Geschwindigkeit und φ irgendeine Funktion ist. Die Schubspannung an der Wand muß dann

$$\tau = \zeta \varrho C^2 \quad \ldots \quad (2)$$

sein, wo ζ ein Festwert ist.

Zur Gewinnung der Funktion φ gehen wir von dem Wert $\frac{d \ln y}{d \ln u}$ aus, der nach der bisherigen Theorie konstant = 7 wäre und setzen

$$\frac{d \ln y}{d \ln u} = f(\sigma) \quad \ldots \quad (3),$$

wo $\sigma = \ln \frac{uy}{\nu}$ ist. Mit $\ln u = \eta$ und $\ln y = \sigma - \eta + \ln \nu$ wird aus (3)

$$\frac{d\sigma}{d\eta} = f(\sigma) + 1,$$

was nach Integration und Delogarithmierung

$$u = C e^{\int^{\sigma} \frac{d\sigma}{f(\sigma)+1}} \quad \ldots \quad (4)$$

gibt. Nimmt man noch

$$y = \frac{\nu e^{\sigma}}{u} \quad \ldots \quad (5)$$

hinzu, so ergibt sich eine Parameterdarstellung für das Geschwindigkeitsprofil.

Das empirische Gesetz für die Wandreibung laute $\tau = \lambda \cdot \varrho \bar{u}^2$, wo λ eine Funktion von $\frac{\bar{u} a}{\nu}$ ist ($\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit, a = Rohrhalbmesser). Wir unterdrücken der Einfachheit halber den Unterschied zwischen der mittleren Geschwindigkeit und der Ge-

---

[1]) Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflußziffer von Normaldüsen. Forschungsarbeiten des VDI, Heft 267, 1924.

[2]) Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), Bd. 214 (1914), S. 199.

[3]) Vergl. v. Kármán, Ueber laminare und turbulente Reibung, Zamm. 1 (1921), 233.

schwindigkeit in der Mitte u_1 und nehmen für diese den Wert aus Formel (4), obwohl diese in der Rohrmitte nicht mehr genau zutrifft und setzen mit $\sigma_1 = \ln \frac{u_1 a}{\nu}$

$$-\ln \lambda = g(\sigma_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Nun ist nach (2) und (4)

$$\zeta = \frac{\tau}{\varrho C^2} = \frac{\tau}{\varrho u_1^2} \cdot \frac{u_1^2}{C^2} = \lambda \cdot e^{2\int^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{f(\sigma)+1}},$$

oder logarithmiert

$$\ln \zeta = -g(\sigma_1) + 2\int^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{f(\sigma)+1} = \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Also nach σ_1 differenziert

$$g'(\sigma_1) = \frac{2}{1+f(\sigma_1)} \quad \text{oder} \quad f(\sigma) = \frac{2-g'(\sigma)}{g'(\sigma)} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, und man erkennt zugleich, daß $f(\sigma)$, das für $g'(\sigma) = 1/4$ wie früher den Wert 7 annimmt, mit abnehmendem $g'(\sigma)$ wächst. Eine genauere experimentelle Nachprüfung steht noch aus, doch hat sich bereits deutlich gezeigt, daß bei Reynoldsschen Zahlen von rd. 200000 die 8. Wurzel des Wandabstands entschieden besser ist als die 7. Wurzel. Für $g'(\sigma) = 1$ wird übrigens $f(\sigma) = 1$, was der laminaren Randzone entspricht.

II. Weiter möchte ich von einem Ansatz berichten, der dazu dienen sollte, die Verteilung der Grundströmung einer turbulenten Bewegung unter den verschiedensten Bedingungen hydrodynamisch zu berechnen. Nach verschiedenen vergeblichen Versuchen konnte hier ein erfreulicher Erfolg erzielt werden, und es zeigte sich überdies, daß der Ansatz für die durch den Impulsaustausch hervorgebrachte scheinbare Schubspannung τ, um die es sich hier handelt, auch einer recht anschaulichen Begründung fähig ist.

In der Boussinesqschen Formel $\tau = \varrho \varepsilon \frac{du}{dy}$ ist ε ein Maß für den turbulenten »Austausch« und ist seiner Dimension nach, die gleich derjenigen von ν ist, das Produkt einer Länge und einer Geschwindigkeit. Diese Länge und die Geschwindigkeit lassen sich nun vorstellungsmäßig fassen. Die letztere ist die Quergeschwindigkeit w, mit der im Mittel die von beiden Seiten herankommenden Flüssigkeitsballen durch die Schicht mit dem zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit $= u$ hindurchtreten.

Die von der Seite der größeren Geschwindigkeiten kommenden Flüssigkeitsballen bringen auch größere Werte der Geschwindigkeit u mit, die von der Seite der kleineren Geschwindigkeiten dagegen kleinere, so daß immer mehr Impuls in der einen Richtung transportiert wird als in der entgegengesetzten (abgesehen von der Stelle von u_{max}). Die gesuchte Länge l ist nun dadurch charakterisiert, daß sie die Entfernung von der betrachteten Schicht angibt, in der die durchschnittlichen u-Geschwindigkeiten, die die Flüssigkeitsballen bei ihrem Durchtritt haben, als zeitlicher Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit angetroffen werden. Genähert sind diese Geschwindigkeiten also $u + l\frac{du}{dy}$ und $u - l\frac{du}{dy}$. Daß l der Größenanordnung nach mit dem Durchmesser der Flüssigkeitsballen übereinstimmt, sei nebenher erwähnt (genauer ist es der »Bremsweg« des Flüssigkeitsballens in der übrigen Flüssigkeit, der aber dem Durchmesser proportional ist). Ueber die Länge l kann einstweilen nur ausgesagt werden, daß sie an der Wand gegen Null gehen muß, da hier nur noch Ballen, deren Durchmesser kleiner als der Wandabstand ist, sich wie besprochen bewegen können. Im übrigen soll l einen möglichst regelmäßigen Verlauf haben. Ist β der durchschnittliche verhältnismäßige Anteil der Fläche, der von den von der einen Seite durchtretenden Flüssigkeitsballen eingenommen wird, so tritt an dieser Seite sekundlich ein Impuls $\beta \varrho w \cdot l \frac{du}{dy}$ durch die Flächeneinheit, von der anderen Seite ungefähr der gleiche Betrag, so daß wir den Boussinesqschen Ansatz also bestätigen und $\varepsilon = 2\beta w l$ setzen können.

Es handelt sich jetzt noch darum, für die Mischgeschwindigkeit w einen brauchbaren Ansatz zu machen. Diese Mischgeschwindigkeit wird immer rasch abgebremst und muß immer wieder neu geschaffen werden. Wir nehmen daher an, daß sie beim Zu-

sammentreffen von zwei Ballen mit verschiedener Geschwindigkeit u erzeugt wird und darum dem Geschwindigkeitsunterschied, also dem Betrage von $l \frac{du}{dy}$, proportional ist. Damit wird aber, falls wir alle unbekannten Zahlenfaktoren auf die nicht genauer bekannte Länge l werfen, die scheinbare Schubspannung σ

$$\tau = \varrho l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \cdot \frac{du}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Dieser Ansatz bedarf noch einer Berichtigung für den Fall, daß $\frac{du}{dy} = 0$ wird. Für die Erzeugung der Geschwindigkeit w wirkt die Nachbarschaft in einer gewissen Breite zusammen; sie wird nicht Null, wenn $\frac{du}{dy} = 0$ ist, wird vielmehr einem statistischen Mittelwert von $\left|\frac{du}{dy}\right|$ proportional gesetzt werden können, also proportional $\sqrt{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$; verändert sich das Geschwindigkeitsprofil in der Strömungsrichtung, wie bei verengten und erweiterten Kanälen, so wird die Stelle, über die gemittelt wird, auch um einen gewissen Betrag stromauf gelegt werden müssen, da der Vorgang der Ausbildung der Geschwindigkeit w Zeit beansprucht.

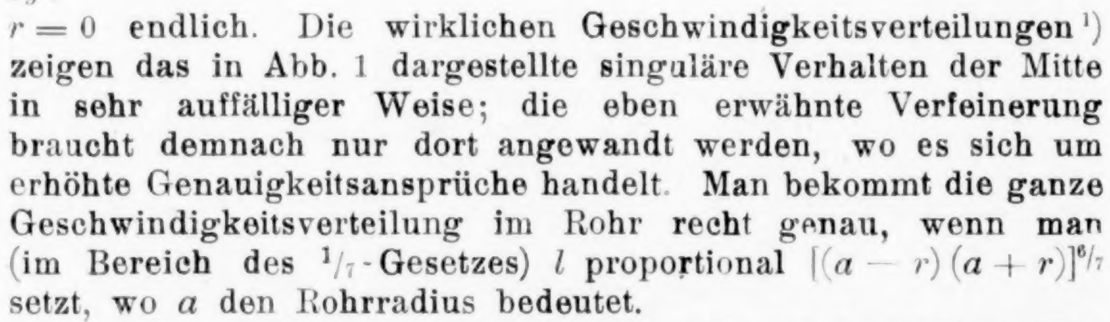
Der Ansatz (9) hat sich bereits in mehrfacher Hinsicht bewährt. Bei einem Rohr z. B. ist die Schubspannung nach den Gleichgewichtsbeziehungen proportional dem Abstand r aus der Mitte, also

$$\tau = \mp \varrho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = c r.$$

Nimmt man l als konstant an, so wird

$$u = A - B r^{3/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

für $r > 0$, für $r < 0$ das Spiegelbild, vergl. Abb. 1. Bei $r = 0$ ist hiernach der Krümmungsradius $= 0$; nimmt man statt $\frac{du}{dy}$ den oben besprochenen statistischen Mittelwert, der genähert $= \sqrt{\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + l'^2 \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2}$ geschrieben werden kann, so wird die Krümmung bei



$r = 0$ endlich. Die wirklichen Geschwindigkeitsverteilungen[1]) zeigen das in Abb. 1 dargestellte singuläre Verhalten der Mitte in sehr auffälliger Weise; die eben erwähnte Verfeinerung braucht demnach nur dort angewandt werden, wo es sich um erhöhte Genauigkeitsansprüche handelt. Man bekommt die ganze Geschwindigkeitsverteilung im Rohr recht genau, wenn man (im Bereich des $^1/_7$-Gesetzes) l proportional $[(a - r)(a + r)]^{6/7}$ setzt, wo a den Rohrradius bedeutet.

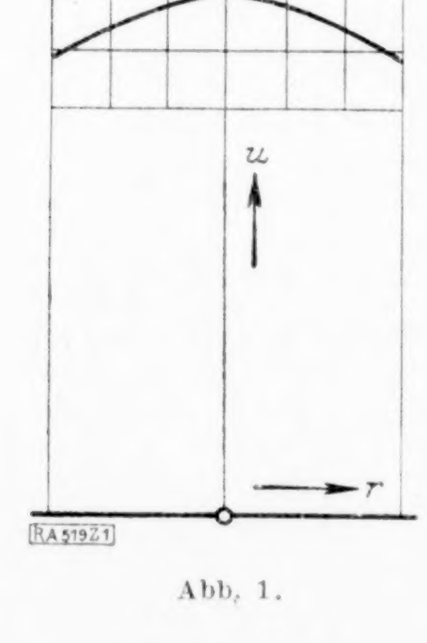


Abb. 1.

Die vorstehenden Ansätze sind weiter angewandt worden auf den Fall der »freien Turbulenz«, d. h. Strömungen ohne begrenzende Wände, z. B. auf einen sich in einem Raum ausbreitenden Flüssigkeitsstrahl und auf die Vermischung eines homogenen Luftstromes mit der angrenzenden ruhenden Luft, die mitgerissen wird. Bei stationären Strömungen dieser Art bewährt sich der Ansatz $l = c x$, wo x die Entfernung von der Stelle ist, wo die Vermischung beginnt. Der in Abb. 2 angedeutete Fall führt zu der Differentialgleichung für die Stromfunktion $F\left(\frac{y}{x}\right)$

$$2 c F'' F''' \pm F F'' = 0,$$

die entweder durch $F'' = 0$ oder durch $2 c F''' \pm F = 0$ gelöst wird. Die beiden Lösungen gleichförmiger Geschwindigkeit und veränderlicher Geschwindigkeit stoßen mit Unstetigkeit in F''' aneinander. Diese und andere Rechnungen sind von Dr. Tollmien numerisch durchgeführt; er wird demnächst in einer Abhandlung darüber berichten. Die Uebereinstimmung seiner Rechnungen mit Versuchsergebnissen sind vorzüglich.

[1]) Vergl. z. B. Jakob und Erk, a. a. O., S. 21.

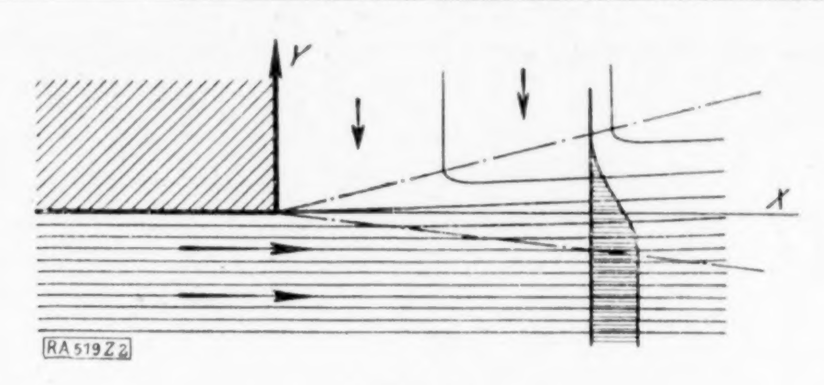


Abb. 2.

Experimentell untersucht sind noch, wie ich erwähnen will, Geschwindigkeitsverteilungen in Kanälen von nicht kreisförmigem Querschnitt mit sehr merkwürdigen Ergebnissen, für die die Erklärung noch fehlt[1]). Weiter sind schwach erweiterte und verengte glattwandige Kanäle untersucht, rauhe in Vorbereitung. Ueber diese Dinge wird ein Forschungsheft des VDI das Nähere berichten. Es ist zu hoffen, daß unser Ansatz sich auch hierbei wieder bewährt, die Prüfung steht jedoch noch aus.

8. Beitrag zur Theorie des Walzvorganges.

Von **TH. v. KÁRMÁN** in Aachen.

Die vorliegende einfache Berechnung hat zweierlei Zweck: einerseits den Walzvorgang vom Standpunkte der Mechanik zu beleuchten und dadurch Kräftespiel und Bewegungsverhältnisse dem praktischen Ingenieur verständlich darzustellen, anderseits für die Auswertung der experimentellen Untersuchungen über Kraftbedarf von Walzstraßen eine Grundlage zu schaffen. Es sei bemerkt, daß auf den Zusammenhang der Plastizitätstheorie mit der Theorie des Walzvorganges zuerst Hr. Sonntag hingewiesen hat; die Anregung zur Durchführung der hier mitgeteilten Berechnung erhielt ich teils durch ein Gespräch mit Hrn. Dresden anläßlich des Internationalen Kongresses für Mechanik in Delft, teils durch Teilnahme an der Tagung des Walzwerkausschusses des Vereins deutscher Eisenhüttenleute in Hagen.

Der Walzvorgang wird im allgemeinen als ein Stauchvorgang betrachtet; als neues Element tritt in meinen Ansätzen hinzu, daß ich außerhalb des Stauchdruckes q die in der Walzrichtung auftretende Druck- oder Zugspannung p einführe.

Es bezeichne:

r den Halbmesser der Walzen,

h_1, h_2 die halbe Dicke des Walzgutes vor und nach dem Walzen,

x die Koordinate in der Walzrichtung, positiv gemessen gegen die Fortschreitungsrichtung des Walzgutes,

φ die Winkelkoordinate,

μ den Reibungskoeffizienten,

ω die Drehgeschwindigkeit der Walzen.

Wir beschränken uns zunächst auf das ebene Problem, d. h. sehen von der sog. »Breitung« ab. Die Rechnung gilt dann angenähert für sehr breites Walzgut oder für seitlich begrenztes Walzen, mit Vernachlässigung der Reibung an den Seitenwänden.

Ich ersetze in erster Näherung die Spannungen über einen »Querschnitt«, d. h. über einen Schnitt senkrecht zur Walzrichtung durch Mittelwerte und betrachte außerdem x klein gegen r.

Wird der Walzdruck senkrecht zur Walzenoberfläche mit q bezeichnet, so besteht zwischen den Spannungen und der Reibungskraft μq folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{d}{dx}(p\,h) = q\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wenn man angenähert $\cos\varphi \sim 1$ setzt und berücksichtigt, daß $\sin\varphi = x/r$

$$h = h_2 + r\,(1 - \cos\varphi) \simeq h_2 + \frac{x^2}{2\,r}, \qquad \frac{dh}{dx} \sim \frac{x}{r}$$

[1]) Es ist genähert so, daß u^2 über den Querschnitt des Kanales aufgetragen eine Böschungsfläche ergibt.

beträgt, so erhalten wir die Gleichung:

$$h \frac{d p}{d x} + p \frac{x}{r} = q \left(\frac{x}{r} - \mu\right).$$

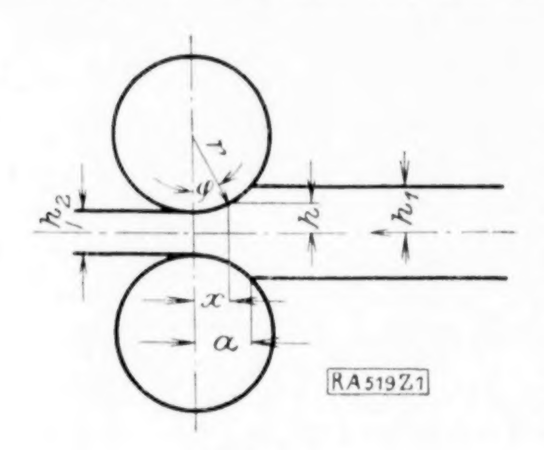


Abb. 1.

Als zweite Gleichung benutzen wir die »Fließbedingung« gemäß der Plastizitätstheorie, d. h.: wir setzen die Differenz der beiden Hauptspannungen gleich der Fließgrenze k des Materials. In erster Annäherung können wir die Hauptspannungen mit p und q identifizieren und schreiben:

$$q - p = k \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

wobei k im wesentlichen von der Temperatur und der Formänderungsgeschwindigkeit abhängig ist.

Die beiden Gleichungen liefern die Differentialgleichung zur Bestimmung von p bzw. q:

$$h \frac{d p}{d x} + \mu p = k \left(\frac{x}{r} - \mu\right) \qquad \text{oder mit} \qquad h = h_2 + \frac{x^2}{2 r}$$

$$\frac{d p}{d x} + \frac{\mu}{h_2 + x^2/2 r} p = \frac{k}{h_2 + x^2/2 r} \left(\frac{x}{r} - \mu\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Wir wollen ausführlich nur den Fall behandeln, in welchem k konstant ist. Der Einfluß der Formänderungsgeschwindigkeit soll in einer späteren Arbeit diskutiert werden.

Die Lösung der Differentialgleichung (3) enthält nur eine Integrationskonstante, während zwei Grenzbedingungen zu erfüllen sind, indem die Längsspannung p an der Ein- und an der Austrittsstelle des Walzgutes verschwinden muß. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich dadurch, daß die Lösung sich aus zwei Stücken zusammensetzt, welche man dadurch erhält, daß man für den Reibungskoeffizienten $+\mu$ bzw. $-\mu$ einsetzt. Die beiden Lösungen entsprechen zwei Bereichen, in welchen die Walze das Walzgut bzw. das Walzgut die Walze mitschleppt. In dem Punkt $x = x_0$, in welchem die beiden Lösungen ineinander greifen, haftet das Walzgut an der Walze. Für $x < x_0$ eilt das Walzgut vor, während es für $x > x_0$ hinter der Walze zurückbleibt.

Bezeichnen wir die zwischen den Walzen befindliche Länge des Walzguts mit a, so können wir die dimensionslose Variable $\xi = x/a$ einführen und die Gleichung für die ebenfalls dimensionslose Verhältnisgröße p/k lautet:

$$\frac{d}{d \xi}\left(\frac{p}{k}\right) + \frac{\mu a/h_2}{1 + \frac{a^2}{2 r h_2} \xi^2} \frac{p}{k} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{2 r h_2} \xi^2} \left(\frac{a^2}{r h_2} \xi - \frac{\mu a}{h_2}\right).$$

Ich führe zwei Verhältniszahlen als charakteristische Größen des Walzvorganges ein:

$$\frac{a^2}{2 r h_2} = \frac{\Delta h}{h_2} = \frac{h_1 - h_2}{h_2} = \delta$$

ist das Verhältnis der Dickenabnahme zur lichten Weite zwischen den beiden Walzen. Die zweite Größe sei:

$$a/\mu r = \varepsilon.$$

Diese hat folgende Bedeutung: Man bezeichnet als Greifwinkel schlechthin den Winkel $\gamma = \operatorname{arctg} \mu \simeq \mu$, da die rückstoßenden Komponente des Walzendruckes für diesen Winkel gerade gleich der Haftreibung ist. Wenn nun der effektive Greifwinkel, d. h. der Winkel, welcher der Eintrittsstelle entspricht, mit $\varphi_{\max}$ bezeichnet wird, so ist offenbar angenähert

$$\varphi_{\max} \sim a/r$$

und ε ist gleich dem Verhältnis $\frac{\varphi_{\max}}{\gamma}$ oder dem Verhältnis des effektiven Greifwinkels zu dem theoretischen Greifwinkel. Man sieht leicht, daß γ keineswegs einen oberen Grenzwert für φ bedeutet, so daß ε auch größer als 1 sein kann.

Wenn man δ und ε verschiedene Werte erteilt, kann man alle Variationen diskutieren.

Die Abb. 2 stellt die Druckverteilung q über $\xi = 0$ bis $\xi = 1$ $(0 < x < a)$ für den Fall $\delta = 1$, d. h. für den Fall, daß das Walzgut auf die Hälfte seiner ursprünglichen Höhe niedergewalzt wird, dar. Variiert wurde ε, und zwar zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 2$. Man sieht, daß bei $\varepsilon = 2$ die beiden Lösungen sich innerhalb $0 < x < a$ nicht mehr schneiden, d. h. der größte effektive Greifwinkel wurde bereits überschritten.

Falls wir sonst alle Größen festhalten, so können wir die Variierung von ε als Variierung des Halbmessers r auffassen. So entsprechen die Fälle $\delta = 1$ und $\varepsilon = {}^1/_2$, $1/\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$, 2 mit $\mu = 0{,}25$ den Verhältniszahlen $r/h_2 = 128, 64, 32, 16, 8$.

Ganz interessant ist die Abhängigkeit des Wirkungsgrades von dem Verhältnis r/h_2. Wir definieren den Wirkungsgrad in folgender Weise. Die Formänderungsarbeit, d. h. die Nutzleistung des Walzvorganges beträgt, wenn V das in der Zeiteinheit verwalzte Volumen bezeichnet,

$$L_n = k\, V \log h_1/h_2.$$

Die aufgewandte Leistung ist offenbar (für die Breite Eins)

$$L_0 = \int_0^{\varphi_{\max}} \mu\, q\, r\, \omega\, d\,\varphi = \omega \int_0^a \mu\, q\, d\,x.$$

Mit Benutzung der Gl. (3) wird

$$L_0 = k\, r\, \omega\, (h_1 - h_2) + \omega \int_0^a p\, x/r\, d\,x.$$

Bezeichnen wir die halbe Dicke des Walzgutes in dem Punkte x_0, wo das Gut an der Walze haftet, mit h_0, so ist offenbar $V = r\,\omega\, h_0$ und

$$\eta = \frac{\log(1 + \Delta h/h_2)}{\Delta h/h_2} \, \frac{h_0}{h_2} \, \frac{1}{1 + 2\int_0^1 (p/k)\, \xi\, d\,\xi}.$$

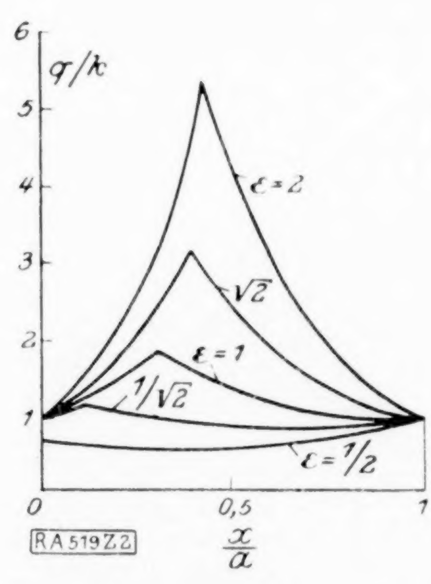


Abb. 2.

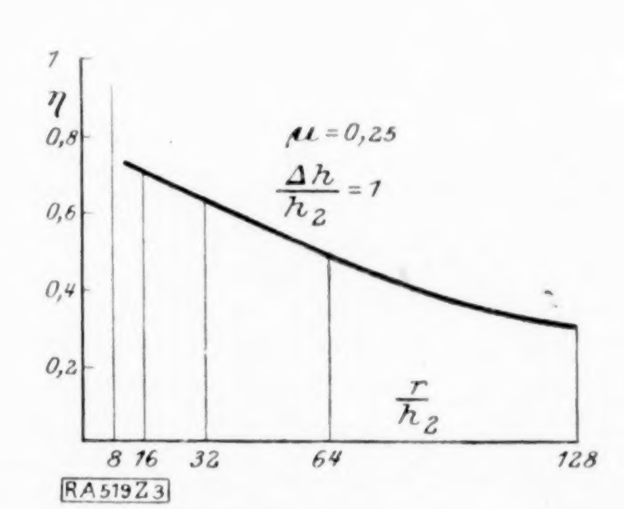


Abb. 3.

Der erste Faktor hängt nur von dem Verhältnis $\Delta h/h_2 = \delta$ ab. Der zweite Faktor ist gleich dem Voreilungsverhältnis $v_2/r\,\omega$ (v_2 = Geschwindigkeit des Walzguts an der Austrittsstelle). Der dritte Faktor stellt den Einfluß der Druckverteilung dar.

In Abb. 3 sehen wir den Einfluß des Walzenhalbmessers auf den Wirkungsgrad. Man sieht insbesondere den Vorteil einer Verkleinerung der Walzenabmessungen.

Die Berechnung soll in folgenden Punkten erweitert werden:

a) Einfluß der Walzgeschwindigkeit. Diese Rechnung ist bereits durchgeführt und soll demnächst veröffentlicht werden.

b) Statt der einfachen Annahme $q - p = k$ soll die Elementarlösung für den Spannungszustand zwischen geneigten Flächen aus der Plastizitätstheorie eingeführt werden.

c) Es soll das Problem dreidimensional durchgearbeitet werden, um die Breitung zu berücksichtigen.

9. Neue Beiträge zum ebenen Problem der Plastizität.

Von **A. NÁDAI** in Göttingen.

In einem ebenen Spannungszustand sind die beiden Normalspannungen σ_x, σ_y und die Schubspannung τ durch die zwei Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

verbunden. Befindet sich die Masse in einem bildsamen Zustand, so tritt zu diesen Gleichungen noch eine Plastizitätsbedingung hinzu. Nimmt man für die letztere die Form

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau^2 = 4\,k^2 = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

an, welche Gleichung besagt, daß die größte Schubspannung in einem plastischen Zustand an allen Stellen x, y im Innern der Masse einen unveränderlichen Wert k besitzt, so kann dieser Gl. genügt werden, wenn man für

$$\tau = k \sin \psi, \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = k \cos \psi \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

setzt, unter ψ eine Funktion der Koordinaten verstanden. Die Spannungskomponenten lassen sich in der Form

$$\sigma_x = \sigma + k \cos \psi, \qquad \sigma_y = \sigma - k \cos \psi, \qquad \tau = k \sin \psi$$

darstellen, wo $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ ist.

Man erhält eine Reihe von Lösungen der Gleichungen (1) und (2) auf elementarem Wege, wenn man aus ihnen eine Gleichung für τ bildet. Wenn Kurven vorhanden sind, welche Umhüllende der einen Schar der Gleitlinien sind, verzweigen sich längs diesen Kurven zwei verschiedene Bereiche der Lösung. Diese Verzweigungslinien bilden natürliche Grenzen der Lösungen, über die hinaus sie sich analytisch in der x, y Ebene nicht fortsetzen lassen. Es werden die Lösungen mitgeteilt, deren Verzweigungslinien 2 parallele Geraden (**Prandtl**), Kreise und beliebige Geraden sind[1]. — Einige Beobachtungen über die Lokalisierung der Gleitflächen in Druckversuchen und über die Ausbildung der Fließschichten des weichen Eisens in einem verdrehten Stab.

10. Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze.[2]

Von **W. LODE** in Göttingen.

Die im folgenden beschriebenen Versuche sind angestellt, um die Abhängigkeit der Fließgrenze allein von der Art des Spannungszustandes unter sonst gleichen Umständen zu untersuchen. Ein Spannungszustand ist, wenn man von seiner Orientierung im Körperelement absieht, vollständig beschrieben durch Angabe seiner drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, für die gelten möge:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

Zugspannungen positiv gerechnet. Nach der Mohrschen Theorie bestehen plastische Deformationen aus Gleitungen, die immer dann eintreten, wenn in einer Ebene eines Körperelements die Schubspannung einen nur von der Normalspannung abhängigen kritischen Wert erreicht. Aus dieser Annahme ergibt sich eine Voraussage, die sich so formulieren läßt, daß die Fließgrenze gegeben ist durch einen kritischen Wert von

$$\tau^* = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

der entweder eine Materialkonstante ist (Schubspannungstheorie) oder nur noch von der Größe

$$\sigma^* = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

abhängt. Zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes brauchen wir jedoch außer σ^* und τ^* noch eine Angabe über die mittlere Hauptspannung. Wir definieren:

$$\mu = \frac{\sigma_2 - \sigma^*}{\tau^*} = 2\,\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1.$$

Dann gilt:

$$\sigma_1 = \sigma^* + \tau^*, \quad \sigma_2 = \sigma^* + \mu\,\tau^*, \quad \sigma_3 = \sigma^* - \tau^*.$$

Im Falle des reinen Zuges ist $\mu = -1$. Die Behauptung der Mohrschen Theorie lautet also, daß die Fließgrenze bedingt sei durch einen kritischen Wert von τ^*, der vielleicht irgendwie von σ^*, nicht aber von μ abhänge.

[1] Ueber die Gleit- und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper. Zeitschrift für Physik, Bd. 30, Heft 2, 1924, S. 106.

[2] Vorläufige Mitteilung über eine Versuchsreihe, die den Gegenstand meiner Dissertation bilden wird. Dort werden auch die Ergebnisse anderer Experimentatoren besprochen werden.

Um diese Behauptung mit größerer Genauigkeit nachzuprüfen, als bisher geschehen ist, haben wir folgende Versuche gemacht:

Die Versuchskörper waren nahtlos gezogene Rohre aus Flußeisen mit 25 mm lichter Weite. Sie wurden zwischen den zur Einspannung vorgerichteten Enden auf dünnere Wandstärken (z. B. 0,8 mm) abgedreht und dann eine Stunde lang im elektrischen Ofen unterm Wasserstoffstrom bei 950 bis 980° geglüht. Nach der Ausmessung wurden sie so in eine Zugmaschine eingebaut, daß sie gleichzeitig in ihrer Längsrichtung gezogen und mit einer Druckpumpe unter Innendruck gesetzt werden konnten. In einem so beanspruchten Rohr entsteht ein Spannungszustand mit den Hauptspannungen σ_e in achsialer, σ_t in tangentialer und σ_r in radialer Richtung. σ_r ist negativ, nämlich an der inneren Oberfläche gleich dem verwandten Innendruck, an der äußeren Oberfläche 0, also allenthalben klein gegen σ_e und σ_t. Durch das Verhältnis des Innendruckes zum Längszug ist das Verhältnis $\sigma_t : \sigma_e$ und damit μ gegeben.

Die Versuche wurden so ausgeführt, daß jeder Probekörper in mehreren Einzelversuchen um etwa 0,3 bis 0,5 vH achsial gedehnt wurde. Dabei hatte während jedes Einzelversuches μ einen anderen konstanten Wert.

In Abb. 1 ist ein Beispiel einer Folge von Spannungsdehnungskurven gezeichnet. Die Ordinaten sind die oberen Hauptspannungen, bezogen auf den ursprünglichen Quer-

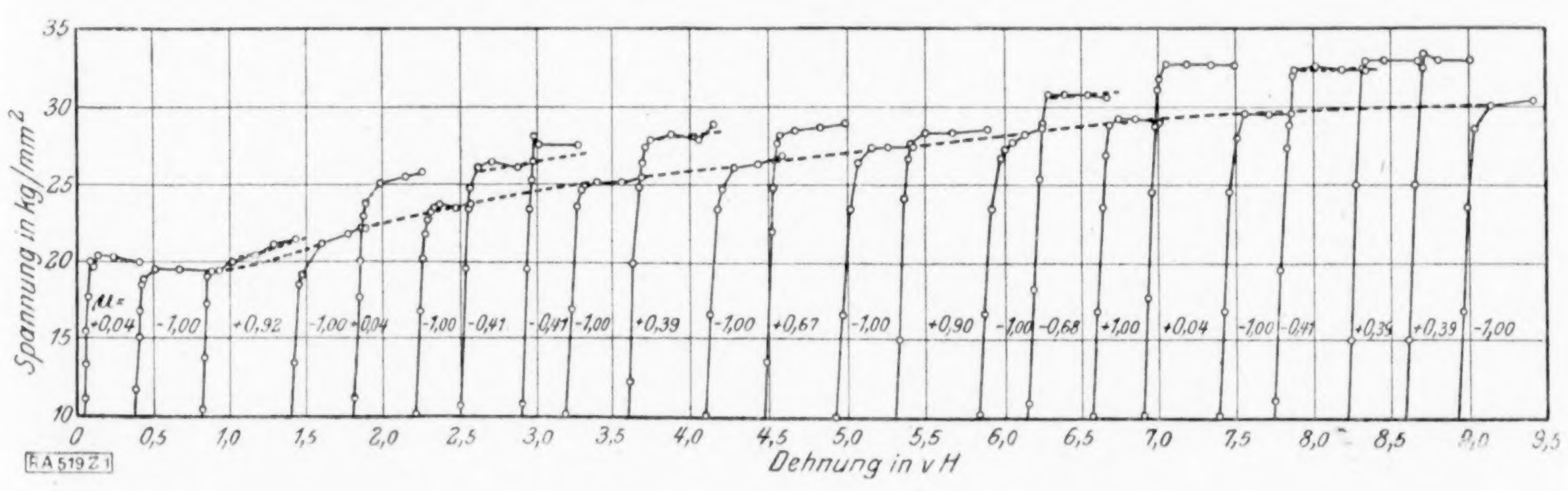


Abb. 1.

schnitt. Zwischen den mit reinem Zug ($\mu = -1$) erhaltenen Kurven ist eine interpolierende Kurve gestrichelt gezeichnet. Sie wird von den meisten anderen Kurven merklich überragt.

Man kann nun auf jeder Einzelkurve einen mittleren Wert von σ_1 auswählen und diesen dividieren durch die zur selben Dehnung gehörige Ordinate σ_z der interpolierenden Kurve. Diese Quotienten sind in Abb. 2 in Abhängigkeit von μ dargestellt. Dabei entsprechen die Punkte dem Probekörper, mit dem die in Abb. 1 gezeichneten Kurven erhalten sind, die Kreise entsprechen einem ähnlichen Versuch, während die Kreuze mit Rohren mit weniger gleichmäßiger Wandstärke erhalten wurden, also weniger wertvoll sind.

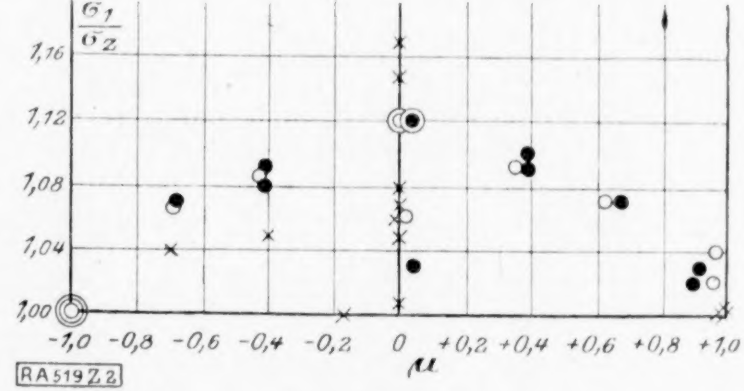


Abb. 2.

Die in der Abb. 2 tiefer liegenden Punkte stammen in der Regel von den ersten Einzelversuchen an den betreffenden Probekörpern.

Beachtet man, daß $\sigma_r \leq 0$, so liefert eine Ueberschlagsrechnung als Ort für die von der Mohrschen Theorie vorausgesagten Punkte die Gerade durch die Punkte $\mu = -1$, $\sigma_1/\sigma_z = 1$ und $\mu = +1$, $\sigma_1/\sigma_z = 0,97$.

Bei der Ausdeutung dieser Ergebnisse muß beachtet werden, daß die angegebenen Werte von μ nur Mittelwerte aus den in den Körperelementen wirklich herrschenden Spannungszuständen sind. Daraus folgt eine Tendenz der gemessenen Werte von σ_1/σ_z kleiner zu sein, als die zu den angegebenen μ gehörigen wahren Werte.

Gelegentlich dieser Versuche wurden auch die Dehnungen in Richtung der mittleren Hauptspannung mit groben Mitteln gemessen. Sie erwiesen sich als klein nur bei Deformationen mit Spannungszuständen mit annähernd $\mu = 0$. Ueber das quantitative Gesetz dieser »mittleren Dehnungen« können wir noch nichts behaupten. Jedenfalls tritt eine plastische Dehnung in Richtung der mittleren Hauptspannung nicht nur dann ein, wenn diese gleich einer der äußeren Hauptspannungen ist.

Die gleichen Versuche wie die beschriebenen wurden auch an Kupferrohren gemacht, bisher jedoch in geringer Anzahl. Aus ihnen kann zurzeit nur mitgeteilt werden, daß sie wenigstens quantitativ dieselben Ergebnisse lieferten wie die an Flußeisen.

11. Die Bewegungsgleichungen beim nichtstationären Fließen plastischer Massen.

Von **HEINRICH HENCKY** in Delft.

Im elastischen Gebiet läßt sich das Gesetz zwischen Spannungen und Dehnungen in folgender Form aussprechen:

1. Die Raumausdehnung ist proportional dem hydrostatischen Teil des Spannungszustandes

$$^1/_3\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{m-2}{m\,E}\,^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{m-2}{m\,E}\,p$$

$$\text{mit } \varepsilon = {}^1/_3\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \text{ und } p = {}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

2. Der Deviator der Deformationen ist proportional dem Deviator der Spannungen. (Den Deviator erhält man bekanntlich aus dem Tensor, wenn man das arithmetische Mittel der Normalkomponenten von jeder Normalkomponente abzieht):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{1}{2\,G}(\sigma_x - p), & {}^1/_2\,\gamma_{xy} &= \frac{1}{2\,G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y - \varepsilon &= \frac{1}{2\,G}(\sigma_y - p), & {}^1/_2\,\gamma_{xz} &= \frac{1}{2\,G}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z - \varepsilon &= \frac{1}{2\,G}(\sigma_z - p), & {}^1/_2\,\gamma_{yz} &= \frac{1}{2\,G}\tau_{yz} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir verwenden im folgenden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des plastischen Körpers den Riccikalkül, der durch den polaren Gegensatz zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten und die dadurch erzeugte Invarianz vom Koordinatensystem allein imstande ist, das Formelgestrüpp zu vermeiden, das bisher die Berechnung endlicher elastischer oder plastischer Verschiebungen verhindert hat.

Den fundamentalen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ denken wir uns gegeben und zwar als eine Funktion auch der Zeit, und behalten uns vor, ihn später zu spezialisieren.

Das Elastizitätsgesetz lautet dann in kovarianter Form, wenn der volle Spannungstensor

$$P_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + p_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,\text{a})$$

und der volle Deformationstensor

$$S_{\mu\nu} = \varepsilon g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,\text{b}) \qquad \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2\,G}\,p_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Definieren wir ferner als plastische Deformation die Gestaltänderung, so scheiden die hydrostatischen Spannungs- und Deformationszustände vollkommen aus und es bleiben nur die Deviatoren übrig, die man durch geeignete Transformation des Koordinatensystems immer auf drei zueinander senkrechte Schubspannungen zurückführen kann.

Was bedeutet nun die Tatsache, daß die Beziehung zwischen den Deviatoren durch eine einzige Elastizitätskonstante reguliert wird? Nichts weniger als dies, daß bei Mitteilung eines Spannungsimpulses, welcher das Material über die Plastizitätsgrenze hinaus bringt, auch der Deviator der nun entstehenden Deformationsgeschwindigkeiten proportional dem Deviator des elastischen Grenzspannungszustandes bleibt, der natürlich auch nach Eintreten der Plastizität sich geltend macht. Damit ist aber sofort die Plastizitätsbedingung gegeben.

Wir erhalten das dem Hookeschen Elastizitätsgesetz analoge einfachste Plastizitätsgesetz für den isotropen Körper, wenn wir für die potentielle Energie des Deviators einen Grenzbetrag festsetzen, der nicht überschritten werden kann.

Nehmen wir $2\,k$ als Plastizitätsgrenze beim einachsigen Zug, so erhalten wir die aufgespeicherte Energie des Deviators im Grenzfall durch doppelte skalare Ueberschiebung

$$A = \frac{1}{2}\, p_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu} = \frac{1}{4\,G}\, p_{\mu\nu}\, p^{\mu\nu} = \frac{2\,k^2}{3\,G}$$

oder als Plastizitätsbedingung

$$p_{\mu\nu} \cdot p^{\mu\nu} = \frac{8}{3}\, k^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Diese Plastizitätsbedingung schließt sich sehr gut an die neuesten Versuchsergebnisse an. Den Kredit, den die Theorie des größten Schubes heute noch in technischen Kreisen genießt, verdankt sie lediglich dem Umstand, daß das Grenzprisma St. Venants, welches man durch Aussetzen der Hauptspannungen als Koordinatenachsen erhält, unserem Grenzzylinder einbeschrieben ist, so daß die bisherige Theorie als grobe Näherung betrachtet werden kann. Was geschieht nun, wenn ein größeres Gebiet eines festen Körpers ins plastische Fließen gekommen ist? Dann treten **außer** dem bereits erwähnten elastischen Spannungstensor noch Reibungsspannungen auf und wenn wir den Ansatz der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten einführen, so wird es möglich sein alle Spannungstensoren in den Deformationsgeschwindigkeiten $e_{\mu\nu}$ auszudrücken.

Dabei ist es zulässig, den Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten von vornherein als Deviator, das heißt, das Material als inkompressibel zu betrachten. Wir erhalten so

für die Reibungsspannungen $\quad \bar{p} = 2\,\varkappa\, e_{\mu\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad$ (6 a)

und für die elastischen Spannungen $\quad p = 2\,\lambda\, e_{\mu\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad$ (6 b),

wobei die letztere Gleichung natürlich nicht den Sinn eines Elastizitätsgesetzes hat, sondern lediglich zum Ausdruck bringt, daß nach Eintritt des Fließens der elastische Spannungszustand durch den Fließzustand geregelt wird, was ja auch unmittelbar einleuchtet.

Der Koeffizient λ kann aus der Plastizitätsbedingung bestimmt werden zu:

$$4\,\lambda^2\, e_{\mu\nu}\, e^{\mu\nu} = 8/3\; k^2$$

oder

$$\lambda = \frac{2\,k}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e_{\mu\nu}\, e^{\mu\nu}}} = \frac{2\,k}{\sqrt{6}}\, \frac{1}{\sqrt{e_\mu{}^\nu\, e_\nu{}^\mu}} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Die gemischten Komponenten haben den Vorteil, daß sie bei orthogonalen Koordinatensystemen direkt in die sogenannten physikalischen Komponenten übergehen, so wie sie bisher bei krummlinigen Systemen verwendet wurden. Beschränken wir uns auf die langsame plastische Bewegung, wie wir sie zum Beispiel in der Natur wahrnehmen an der Bewegung von Gletschern und von glühenden Lavamassen, in der Technik beim Schmieden, Pressen und Ziehen von Metallen, so wie beim Durchgang von Eisenmassen durch die Walzen eines Walzwerks, so können wir die Beschleunigungen vollkommen vernachlässigen. Bedenklicher ist die Annahme konstanter Temperatur, da die Erfahrung gelehrt hat, daß die Abkühlung glühender Massen den Fließvorgang in ganz wesentlichem Maße beeinflußt, aber auch diese Annahme ist für die erste Entwicklung der Theorie nicht zu umgehen.

Ist ϱ die Masse der Volumeneinheit, X^μ die Massenkraft, etwa die Schwere bei der Bewegung eines Gletschers, so haben wir als Gleichgewichtsbedingungen des Volumenelements, daß die Divergenz des Spannungszustandes und die Massenkraft einen Nullvektor bilden müssen. In den Symbolen des Riccikalküls mit einem ∇ als Zeichen der kovarianten Differentiation, das ist ein Differentiationsprozeß bei dem der Einfluß der Krummlinigkeit des Koordinatensystems ausgeschaltet wird.

$$\nabla_\nu P^{\mu\nu} + \nabla_\nu \bar{p}^{\mu\nu} + \varrho\, X^\mu = 0$$

und nach Einsetzen der Formeln (6 a) und (6 b)

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} + 2\,\varkappa\, \nabla_\nu\, e^{\mu\nu} + 2\,\nabla_\nu\, (\lambda\, e^{\mu\nu}) + \varrho\, X^\mu = 0.$$

Durch Ueberschieben mit dem kovarianten Fundamentaltensor $g_{\mu\sigma}$ wird hieraus

$$\frac{\partial p}{\partial x^\sigma} + 2\,\varkappa \nabla_\nu\, e_\sigma{}^\nu + 2\,\nabla_\nu\, (\lambda\, e_\sigma{}^\nu) + \varrho\, X_\sigma = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Hierzu tritt noch die Gleichung

$$e_\nu{}^\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Setzt man $\Delta_\nu(\lambda e_0^{\nu}) = 0$, so bleiben die Differentialgleichungen einer Flüssigkeit mit sehr großer Reibung und langsamer Bewegung übrig. Berechnet man aber die Arbeit der inneren Reibung, so erhält man ein Verhalten, das von dem einer reibenden Flüssigkeit total verschieden ist.

Die in der Volumeneinheit verlorengehende Energie D beträgt nämlich nicht

$$D = 2\varkappa\, e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} \text{ wie bei einer Flüssigkeit,}$$

sondern

$$D = (p^{\mu\nu} + \overline{p}^{\mu\nu})\, e_{\mu\nu}$$

$$D = 2(\varkappa + \lambda)\, e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} = 2(\varkappa + \lambda)\, \Sigma (e_\mu{}^\nu)^2.$$

Da $\Sigma (e_\mu{}^\nu)^2 = {}^2/_3\, \frac{k^2}{\lambda^2}$,

so ist

$$D = {}^4/_3\, k^2/\lambda\, \frac{\varkappa + \lambda}{\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Kann man λ rational in den Geschwindigkeiten ausdrücken, so ist eine Integration in geschlossener Form möglich. Dieser Fall tritt ein bei der rotationssymmetrischen stationären Strömung einer plastischen Masse durch ein gerades Rohr, sowie beim Zugversuch, solange das Material noch keine bemerkbare Einschnürung hat. Bemerkenswert ist, daß in diesem letzten Fall bei Fortdauer der gleichmäßigen Deformation der Stab nach einer endlichen Zeit verschwunden sein müßte.

In den 4 Gleichungen (8) und (9) treten 7 Unbekannte auf.

Haben wir eine stationäre Strömung, so müssen wir die Deformationsgeschwindigkeiten in den Geschwindigkeiten ausdrücken und haben dann ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Die $g^{\mu\nu}$ sind darin willkürlich wählbar. Stellen wir uns aber die Aufgabe, die Materieteilchen auf ihrer Bahn zu verfolgen, so müssen wir in dem Körper ein Koordinatensystem am Anfang der Bewegung an die Materieteilchen festheften und dann diese sich mitbewegende Bezugsmolluske als Koordinatensystem benutzen. Natürlich wird dieses System, wenn es auch anfangs rechtwinklig war, bald schiefwinklig werden. Wir haben daher allen Grund, unsere Gleichungen von vornherein in kovarianter Form zu schreiben.

Nun besteht eine einfache Beziehung zwischen dem kovarianten Fundamentaltensor unserer äquivoluminären Bezugsmolluske und den Komponenten des Deformationstensors.

Die Einheitsstrecken unseres Koordinatensystems sind nämlich gleich den Quadratwurzeln aus den Komponenten des Fundamentaltensors mit gleichen Indizes.

Die zeitliche Zunahme einer solchen Einheitsstrecke ist aber nichts anderes als die kovariante Komponente des Tensors der Geschwindigkeitsänderungen $e_{\mu\nu}$.

$$\overline{e_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}}}\, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Man sieht ohne weiteres, daß für $\mu = \nu$ die Formel richtig ist. Der allgemeine Fall erfordert eine etwas längere Zwischenrechnung, wobei man den Winkel zwischen den zwei Koordinatenrichtungen.

$$\cos(\mu\nu) = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}\, g_{\nu\nu}}}$$

einführen muß.

Zur Bestimmung der $g_{\mu\nu}$ haben wir als weitere Gleichungen die Bedingung, daß der Riemann Christoffeltensor, der sich durch die ersten und zweiten Abteilungen der $g_{\mu\nu}$ ausdrücken läßt, ein Nulltensor sein muß.

Die 6 Gleichungen, die wir so erhalten, sind aber nur drei unabhängigen Gleichungen gleichwertig, da die $g_{\mu\nu}$ auch durch die 3 Geschwindigkeitskomponenten sich ausdrücken lassen.

Eine angenäherte Integration des Gleichungsssystems ist für den ebenen Fall und für den rotationssymmetrischen Fall nicht ausgeschlossen. Abgesehen davon tragen die Gleichungen jedenfalls zur begrifflichen Klärung bei. — Der gegenwärtige Stand der Mechanik der Kontinua ist dadurch gekennzeichnet, daß in ganz übertriebener Weise die Aufmerksamkeit auf den Spannungszustand gerichtet ist, weil es an Methoden fehlte, um die plastischen Deformationen voraus zu berechnen. Aus dem Wunsche heraus, hierzu beizutragen, sind die obigen Ausführungen entstanden.

12. Bemerkungen zur Formulierung des mathematischen Problems der Plastizitätstheorie.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Die jüngste Entwicklung der Plastizitätstheorie, wie sie mit den beiden Arbeiten von Hrn. Prandtl[1]) eingesetzt hat, geht davon aus, daß es innerhalb des allgemeinen Problems der Mechanik plastisch deformabler Körper gewisse »statisch bestimmte« Fälle gibt. Beim ebenen System z. B. hat man für die drei Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ zwei Gleichgewichtsbedingungen und dazu die Gleichung der Elastizitätsgrenze (Plastizitätsbedingung), etwa $|\tau_{\max}| = K$, also drei Gleichungen mit drei Variablen. (Im allgemeinen räumlichen Fall muß man neben den drei Gleichgewichts- und der einen Plastizitätsbedingung, um die sechs Spannungsgrößen zu bestimmen, von vornherein schon den Zusammenhang mit den Deformationen berücksichtigen). Gleichwohl ist auch das ebene Spannungsproblem mit den Spannungsgleichungen allein nicht lösbar, und zwar deshalb nicht, weil die Randbedingungen, die zu den Differentialgleichungen hinzutreten und die einzelne konkrete Aufgabe erst bestimmen, Aussagen über die Verschiebungen enthalten.

Zunächst etwas über die Spannungsverteilung! Spaltet man von der gesamten Spannungsdyade $\mathfrak{P}$ den mittleren Druck $-p = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ ab, so bleibt, wenn wir $|\tau_{\max}| = K$ festhalten, für jeden Punkt noch ein Spannungszustand $\mathfrak{P}'$ mit den Hauptspannungen $+K$, $-K$ übrig. Das Gleichgewicht verlangt, daß der derivierte Vektor $\nabla \mathfrak{P}'$ dieser Zusatzspannung gleich dem grad p ist. Bezeichnen wir als »erste« Hauptschubrichtung diejenige, die aus der Hauptzugrichtung durch positive Drehung von 45° hervorgeht und mit ϑ ihren Winkel gegen eine feste x Achse, so zeigt eine einfache Rechnung: Es ist $\nabla \mathfrak{P}'$ und somit auch grad p gleich $2K$ mal dem an der ersten Hauptschubrichtung gespiegelten grad ϑ. Sind $\alpha(x, y) =$ konst. und $\beta(x, y) =$ konst. die beiden Gleitlinienscharen, d. h. Kurven, die an jeder Stelle Tangenten in der ersten bzw. zweiten Hauptschubrichtung aufweisen, so folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{p}{2K}\right) = \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{p}{2K}\right) = -\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

daß — von dem Ausartungsfall gerader Gleitlinien abgesehen — gesetzt werden darf:

$$\vartheta = \beta - \alpha, \quad \frac{p}{2K} = -\beta - \alpha; \quad \alpha = -{}^1/_2\left(\frac{p}{2K} + \vartheta\right), \quad \beta = -{}^1/_2\left(\frac{p}{2K} - \vartheta\right) \quad (2).$$

Zeichnet man daher das Gleitliniennetz mit äquidistanten Werten α, β, so sind die Diagonalkurven die Isoklinen und Isobaren. Ist eine Gleitlinienschar geradlinig, so bildet sie zugleich die Linien $\vartheta =$ konst. und $p =$ konst. Aus (2) folgen unmittelbar die sehr schönen, von Hrn. Hencky gefundenen differentialgeometrischen Eigenschaften der Gleitlinien[2]).

Ein Gleitliniennetz kann dargestellt werden durch eine komplexe Funktion der Variablen α, β, nämlich $z(\alpha, \beta) = x(\alpha, \beta) + i y(\alpha, \beta)$. Die einzige Bedingung, der z unterworfen ist, ist die, daß die Ableitung nach α das Richtungsargument $\vartheta = \beta - \alpha$, die Ableitung nach β das Argument $\beta - \alpha + 90°$ aufweisen muß:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -R_\beta e^{i(\beta-\alpha)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = -i R_\alpha e^{i(\beta-\alpha)} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Die reellen Größen R_α, R_β sind nichts anderes als die Krümmungsradien der Kurven $\alpha =$ konst. und $\beta =$ konst. Aus (3) ergibt sich das für die Anwendungen sehr fruchtbare Superpositionsgesetz: Bezieht man zwei Gleitliniennetze so aufeinander, daß die Punkte mit gleichen α, β-Werten, also auch Isoklinen und Isobaren, einander entsprechen, so liefert die Addition der von einem Festpunkt o nach entsprechenden Punkten beider Netze gezogenen Vektoren wieder ein Gleitliniennetz. Ein Grundtypus der Lösungen von (3) ist, mit $C = a + bi$, $\overline{C} = a - bi$:

$$z = e^{(\beta - \alpha) i}\left[\frac{e^{C\alpha + \beta/C}}{C - i} + \frac{e^{\overline{C}\alpha + \beta/\overline{C}}}{\overline{C} - i}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

---

[1]) Diese Zeitschr. 1, 1921, S. 15 bis 28 und Nachr. Göttinger Ges. d. Wiss. math. phys. Kl. 1920, S. 74.

[2]) H. Hencky, diese Zeitschr. 3, 1923, S. 211 bis 251; L. Prandtl, ebenda, S. 401 bis 406; E. Schmidt und C. Carathéodory, ebenda, S. 468 bis 475.

Die Kurven $\beta =$ konst. (und ähnlich die $\alpha =$ konst.) nach (4) werden von dem freien Endpunkt eines Doppelarmes (Abb. 1) beschrieben, wenn sein erstes Glied um den festen Endpunkt mit der Drehgeschwindigkeit $b - 1$, das zweite um das Zwischengelenk mit $-b-1$ rotiert und beide Armlängen sich in der Zeiteinheit um den Faktor e^a ändern; für $a = 0$ sind es Zykloiden, für $b = 0$ logarithmische Spiralen. Indem man a und b variiert, kann man durch Uebereinanderlagerung von (exakt gesprochen: doppelt unendlich vielen) Lösungen der Form (4) jedes nicht ausgeartete Gleitliniennetz erzeugen.

Abb. 1.

Ist ein Gleitliniennetz gegeben, so wird dadurch die Verschiebungsrichtung des plastischen Mediums in jedem Punkt noch keineswegs eindeutig bestimmt. Die Saint Venantsche Theorie besagt nur: die Richtung der größten Schiebungs-(Gleit-)Geschwindigkeit fällt mit der Richtung größter Schubspannung zusammen. Setzen wir die Volumänderung als verschwindend klein voraus, so können die Geschwindigkeiten von einer Stromfunktion ψ abgeleitet werden;

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

und die Dehnungsgeschwindigkeiten $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ bzw. die Gleitgeschwindigkeit γ sind:

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

In der Richtung größten und kleinsten γ-Wertes ist $\varepsilon = 0$. Stellen wir uns die Aufgabe, ψ als Funktion von α und β zu bestimmen, so haben wir auszudrücken, daß, wenn die α- und β-Richtung mit der x- und y-Richtung zusammenfallen, $\partial^2 \psi / \partial x \partial y$ Null sein muß. Die Ausrechnung liefert für ψ — vom Ausartungsfall abgesehen — in

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{R_\alpha}{R_\beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\frac{R_\beta}{R_\alpha} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

eine hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den Gleitlinien als Charakteristiken. Die Riemannsche Theorie lehrt, daß willkürlich vorschreibbar sind: entweder die vollen Geschwindigkeitswerte längs einer beliebigen Kurve oder die Normalkomponenten der Geschwindigkeit längs zweier sich kreuzender Gleitlinien. Dringt beispielsweise ein starrer ebener Stempel (Abb. 2) in einen unendlich ausgedehnten plastischen

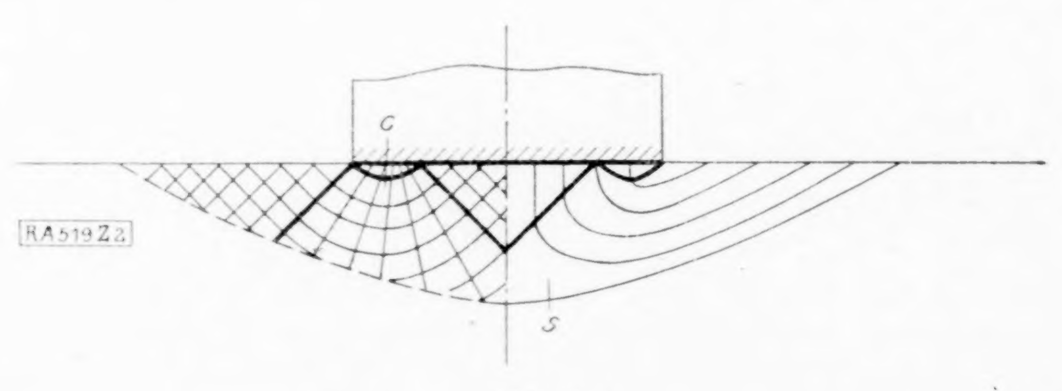


Abb. 2.

Körper ein, so wird zunächst das Gleitliniennetz durch die Wahl einer Kurve C, die die unter 45° geneigten geraden Gleitlinien in der Mitte unter dem Stempel mit denen an den Seiten verbindet, festgelegt. Wählt man dann eine Linie S als die den plastischen Bereich begrenzende Stromlinie mit $\psi = 0$, $\partial \psi / \partial n = 0$, so ist alles weitere bestimmt und man hat die Richtigkeit der beiden getroffenen Annahmen an den beiden Bedingungen zu prüfen, daß an der Unterfläche des Stempels (und damit auch längs der die Ecken verbindenden Gleitlinie unter ihm) die Stromlinien vertikal und in gleichmäßigen Abständen eintreffen (wie in dem rechten Teil der Abb. 2 angedeutet). Damit ist eine vollständige Randwertaufgabe zumindest formuliert.

An Stelle von (7) muß man, wenn die eine Gleitlinienschar aus Geraden besteht und α für das Wegelement auf der Geraden genommen wird, die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{1}{R\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0 \qquad (7')$$

benutzen. Ist das Gleitliniennetz in diesem Fall durch $R\alpha = F(\beta) - \alpha$ gegeben, so lautet die allgemeine Lösung von (7'):

$$\psi = -\int^{\beta} F(\beta)\, g(\beta)\, d\beta + \alpha \int^{\beta} g(\beta)\, d\beta + f(\alpha) \qquad (8)$$

mit f und g als willkürlichen Funktionen. Bestehen die Gleitlinien aus logarithmischen Spiralen mit dem Exponenten a bzw. $1/a$, so ist $R_\beta : R_\alpha = a$ und die allgemeinste Lösung von (7), die einer vom Polarwinkel φ eines Polarkoordinatensystems r, φ unabhängigen Bewegung entspricht, ist

$$\psi = c\,\varphi + \frac{c\,(1-a^2)}{2\,a} \operatorname{lognat} r + C\,r^2 \qquad (9)$$

Von dem Glied $C\,r^2$ abgesehen, das eine reine Rotation darstellt, sind die Stromlinien wieder logarithmische Spiralen, die in dem Fall $a = 1$ in die Strahlen $\varphi =$ konst. übergehen. Die bekannten Gleitlinienbilder mit den unter 45^0 stehenden Spiralen entsprechen also tatsächlich einer rein radialen Verschiebung. — Es sei noch erwähnt, daß der einzige Fall, in dem eine Gleitlinienschar zugleich die Stromlinien bilden kann, der der Parallelkurven ist.

Ein tatsächlich »statisch bestimmtes« Problem liegt bei der Torsions-Beanspruchung zylindrischer Stäbe vor, die von Hrn. Nádai[1]) und von Hrn. Trefftz[2]) behandelt wurde. Man muß nur beachten, daß nach den Grundgleichungen der Plastizitätstheorie mit jedem plastischen Spannungszustand eine Bewegung der ganzen Masse als starrer Körper, also auch Ruhe aller Teile, verträglich ist. Nimmt man nun an, daß bei der Torsion eines beliebigen Zylinders immer noch ein elastischer Kern übrig bleibt — was wohl allgemein zutreffen dürfte — so ist, da den plastischen Formänderungen gegenüber die elastischen als verschwindend klein angesehen werden, die »Unbeweglichkeit« des plastischen Teiles eine mit den Gleichungen und den Randbedingungen übereinstimmende Lösung. Die Spannungsverteilung wird dabei durch die Böschungsflächen des Randes veranschaulicht und ist analytisch durch ein interessantes Randwertproblem bestimmt: Gegeben ist eine Vektorverteilung in der Ebene; man soll jene Lösung von $\Delta u = 0$ bestimmen, für die auf einer geschlossenen Linie, die der Gestalt nach nicht gegeben ist, grad u mit dem gegebenen Vektor zusammenfällt.

Endlich noch ein Wort über das allgemeine dreidimensionale Problem! Der anscheinend so gewaltige Unterschied zwischen dem zwei- und dem dreidimensionalen Fall wird vielleicht gemildert durch folgende Betrachtungsweise. Als Grundlage dient uns die von Saint Venant begründete Theorie, die besagt, daß die Dyade der Deformationsgeschwindigkeit und die nach Abspaltung des mittleren Druckes verbleibende Spannungsdyade gleichachsig und ähnlich seien. Die Differentialgleichungen dieser Theorie habe ich 1913 entwickelt[3]) und ihnen eine neue Plastizitätsbedingung hinzugefügt, die sich, wie sich in letzter Zeit gezeigt hat[4]), gut bewährt. Dieser Ansatz reicht zur Bestimmung der Spannungen und Formänderungen — bei Hinzuziehung der Randbedingungen — aus. Man kann nun, wenn man es vorzieht, zunächst mit den Spannungen allein zu arbeiten, zu den drei Gleichgewichtsgleichungen zwei »Kompatibilitätsbeziehungen« hinzufügen, die in genau gleicher Weise gewonnen werden wie in der Elastizitätstheorie. (Man hat nur bei den Differentiationen zu beachten, daß die Größe, die an Stelle der Elastizitätszahl steht, keine Konstante ist.) Doch ist die wirkliche Ausführung dieses Verfahrens reichlich kompliziert, so daß man sich vorläufig keine praktischen Ergebnisse davon versprechen kann.

---

[1]) Diese Zeitschr. 3, 1923, S. 442 bis 454.

[2]) Diese Zeitschr. 5, 1925, S. 64 bis 73.

[3]) Nachr. Göttinger Ges. d. Wiss. math. phys. Kl. 1913, S. 582 bis 592. Wie ich nachträglich feststellen konnte, sind die Differentialgleichungen (nicht die Plastizitätsbedingung) mit anderer Ableitung schon von M. Lévy, Journal de mathém. (2) 16, 1871, S. 369 gegeben worden.

[4]) Vgl. z. B. das vorstehende Referat von Hrn. Lode.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Einführung in die Theorie der Integralgleichungen.[1]

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Das Buch, aus dem im folgenden ein Kapitel veröffentlicht wird, ist in erster Linie für den Physiker geschrieben und will, namentlich in dem jetzt erscheinenden ersten Bande, die mathematischen Methoden, mit denen in der klassischen Physik gearbeitet wird, systematisch darstellen. Die höheren mathematischen Probleme, die gelegentlich dem Ingenieur begegnen, sind im Grunde nichts anderes als Fragestellungen aus dem Bereich der klassischen Physik. Immer mehr tritt es zu Tage, daß die »angewandte Mathematik«, deren der Ingenieur, wenn er sich schwierigeren Aufgaben gegenüber sieht, bedarf, nichts anderes ist, als das alte Handwerkzeug des mathematischen Physikers, ergänzt durch einige in den letzten Jahrzehnten neu hinzugekommene, fruchtbare Methoden und Gedankengänge.

Die Theorie der Integralgleichungen, die eine der Schöpfungen dieser Jahrzehnte ist, steht mit gutem Grunde heute noch weit außerhalb dessen, was im regelmäßigen Unterricht an Technischen Hochschulen geboten wird. Doch sind die Grundgedanken der Theorie durchaus nicht so schwierig und liegen dem Anschauungskreis des Ingenieurs nicht so fern, daß ihre Kenntnis nicht von dem weiter Arbeitenden ohne besondere Mühe erworben werden könnte. Welch naher Zusammenhang zwischen Begriffsbildungen der Integralgleichungstheorie und gewissen in der Mechanik eingebürgerten Begriffen besteht, wird beispielsweise aus I **3** hervorgehen, wo der »Kern« einer Integralgleichung im wesentlichen als die »Einflußfunktion«, mit der der Statiker so gern arbeitet, erklärt wird. Im übrigen sind in dieser Zeitschrift wiederholt technische Probleme unter Zuhilfenahme von Integralgleichungen behandelt worden, so von E. Trefftz das allgemeine Problem der Knickung eines Stabes[2]), wobei eben die genannte Deutung des Kerns als Einflußfunktion zur Geltung kommt; dann von K. Wieghardt die äußerst interessante Frage nach dem Gleichgewicht eines Balkens auf nachgiebiger Unterlage (Eisenbahnschiene auf ihrer Bettung)[3]).

Die folgenden Ausführungen mögen dem mit der Theorie noch nicht vertrauten Leser eine erste Einführung bieten, die ihn in den Stand setzt, einerseits die genannten und ähnliche Arbeiten der technischen Mechanik zu verstehen, andererseits sich mit eingehenderen Darstellungen der mathematischen Theorie vertraut zu machen. In unserem Buche selbst folgt auf das hier abgedruckte Kapitel zunächst ein weiteres, das sich mit der Auflösung der Integralgleichungen beschäftigt, hierauf eines über die Anwendungen der Integralgleichungen auf verschiedene Randwertprobleme und schließlich ein letztes über ihre Anwendung in der Potentialtheorie; von der Seite der physikalischen Probleme aus wird dann im zweiten Bande des Werkes auf die Theorie mannigfach zurückgegriffen.

I. Drei Arten von Aufgaben.

1. Vorbemerkung. Zahlreiche Aufgaben der Mechanik und Physik lassen sich auf die Form sogenannter Integralgleichungen bringen, in denen die gesuchte Funktion im Integranden eines bestimmten (oder auch unbestimmten) Integrals auftritt. Wenn auch in den meisten Fällen dieselbe Funktion als Lösung eines Randwertproblems einer Differentialgleichung dargestellt werden kann, so gewinnt man aus der Betrachtung der Integralgleichung doch verschiedene Vorteile. Vor allem entfällt die beim Differential-

[1]) Mit freundlicher Erlaubnis der Verlagsbuchhandlung Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig gelangt hier aus dem eben erscheinenden ersten Bande des Buches »Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik«, herausgegeben von Ph. Frank in Prag und R. v. Mises in Berlin (Neubearbeitung von Riemann-Weber »Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik«) das Einführungskapitel des dritten Abschnittes »Integralgleichungen und Potential« zum Vorabdruck. Text und Abbildungen sind unverändert gelassen, auch die Hinweise auf andere Stellen des Buches in der Regel beibehalten worden, soweit dies das Verständnis zu fördern schien.

[2]) Diese Zeitschr. Bd. 3, 1923, S. 272 bis 275. Verwandte Betrachtungen finden sich bei R. v. Mises, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1911, Bd. 22, S. 23.

[3]) Diese Zeitschr. Bd. 2, 1922, S. 165 bis 184.

gleichungsproblem störende Spaltung in Hauptgleichung und Nebenbedingungen: man umfaßt mit der Integralgleichung von vornherein alle Bestimmungsstücke der Aufgabe. Weiter hat man nicht Probleme verschieden hoher Ordnung (mit jedesmal anderer Zahl von Nebenbedingungen) gesondert zu untersuchen, sondern in der Hauptsache nur eine Gattung von Integralgleichungen. Ferner verschwindet bis zu einem gewissen Grade der Unterschied zwischen Problemen mit einer und solchen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen, der sonst zu den so weit auseinanderliegenden Theorien der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen führt. Endlich lassen sich in vielen Fällen auch Aufgaben mit mehreren abhängigen Variablen, die sonst zu Systemen simultaner Differentialgleichungen führen, mittels einer einzigen Integralgleichung behandeln. Man besitzt somit in den Integralgleichungen ein besonders geeignetes Werkzeug zur Erledigung allgemeiner analytischer Fragen, wie sie sich z. B. bei der Untersuchung schwingungsfähiger Systeme aufdrängen. Die elastische Saite, der biegungs- oder torsionssteife Stab, die dünne Membran und die elastische Platte, alle diese Aufgaben haben unverkennbar etwas Gemeinsames, das nicht genügend zur Geltung kommt, wenn man die Untersuchung einmal an den gewöhnlichen Differentialgleichungen erst zweiter, dann vierter Ordnung, endlich an den partiellen Gleichungen beider Ordnungen vornehmen muß.

Für das Verständnis der Integralgleichungsprobleme ist es nützlich, dem hier auftretenden — im übrigen aus den Elementen der Integralrechnung bekannten — Zeichen

$$\int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eines bestimmten Integrals über das Produkt einer Funktion von zwei Variablen $K(x,\xi)$ und einer Funktion einer Variablen $y(\xi)$ eine besondere Auffassung zu leihen. Bei der Integration wird natürlich x als konstanter Parameter betrachtet. Denken wir uns zunächst einen Vektor $\mathfrak{y}$ mit den Komponenten y_1, y_2, y_3 gegeben und dazu eine Gruppe von neun Zahlen K_{11}, $K_{12} \ldots, K_{33}$, so kann man daraus einen Vektor $\mathfrak{y}'$ mit den Komponenten (Abb. 1)

$$y_1' = K_{11}\, y_1 + K_{12}\, y_2 + K_{13}\, y_3,$$
$$y_2' = K_{21}\, y_1 + K_{22}\, y_2 + K_{23}\, y_3,$$
$$y_3' = K_{31}\, y_1 + K_{32}\, y_2 + K_{33}\, y_3$$

ableiten. Die neuen Vektorkomponenten schreiben sich viel kürzer in der Form

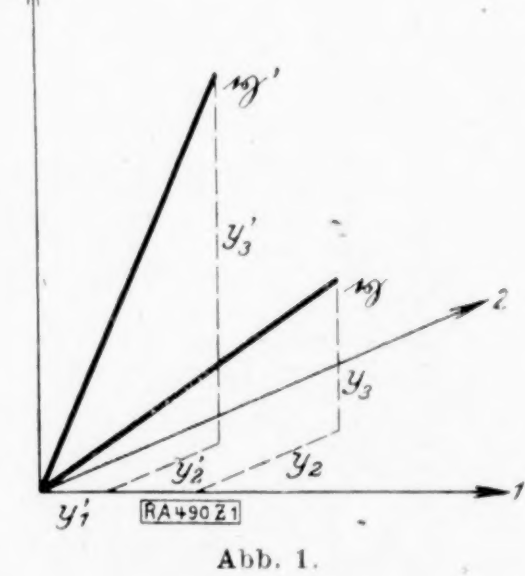


Abb. 1.

$$y_x' = \sum_{\xi=1}^{3} K_{x\xi}\, y_\xi, \qquad x = 1,\ 2,\ 3 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

die schon eine deutliche Analogie zu (1) aufweist. Bekanntlich nennt man eine derartige Ableitung eines neuen Vektors aus einem gegebenen eine lineare Transformation, und es hat keine Schwierigkeit, diese Definition und diese Vorstellung auf Vektoren in mehr als dreidimensionalen Räumen auszudehnen. (Vgl. a. II, § 2, **2.**) Man muß nur eine Matrix von n^2 in einem Quadrat angeordneten Zahlen

$$\left.\begin{matrix} K_{11}, K_{12} \ldots K_{1n} \\ K_{21}, K_{22} \ldots K_{2n} \\ \ldots\ldots \\ K_{n1}, K_{n2} \ldots K_{nn} \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

durch die eine lineare Transformation in der Form

$$y_x' = \sum_{\xi=1}^{n} K_{x\xi}\, y_\xi, \qquad x = 1,\ 2 \ldots n \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bestimmt wird, als gegeben ansehen. Es ist dann ein naheliegender Schritt, auch das Integral (1) in dieser Weise als Operator aufzufassen, durch den einer beliebigen Funktion y eine neue Funktion y' zugeordnet wird. Ist der »Kern« $K(x,\xi)$ und natürlich

das Integrationsgebiet a, b gegeben, so wird durch (1) jede Funktion $y(\xi)$, für die sich das Integral überhaupt bilden läßt, in eine neue Funktion

$$y'(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

»transformiert«. Man sagt daher, K und a, b bestimmen eine lineare Funktionaloperation. Ihr linearer Charakter kommt darin zum Ausdruck, daß sie, auf die lineare Kombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k$ angewandt, die lineare Kombination der einzelnen Transformierten $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots c_k y_k'$ ergibt, wie man durch Einsetzen dieses y-Wertes sofort erkennt. (Vgl. a. II, § 1, **1.**)

In den verschiedenen Ansätzen und Durchführungen physikalischer Probleme tritt die hier angedeutete Auffassung des Integrals (1) als Operator bald mehr, bald weniger unmittelbar in die Erscheinung. — Wir werden zunächst drei grundsätzlich verschiedene Formen kennen lernen, in denen die Integralgleichungen in der Mechanik und Physik eine Rolle spielen.

2. Abbildungs- (Umkehr-) Probleme. Die Bedeutung des Integrals (1) als lineare Transformation der Funktion $y(\xi)$ kommt am unmittelbarsten zum Ausdruck in einer Reihe von Aufgaben, für die wir zunächst die der optischen Abbildung als Beispiel nehmen wollen[1]).

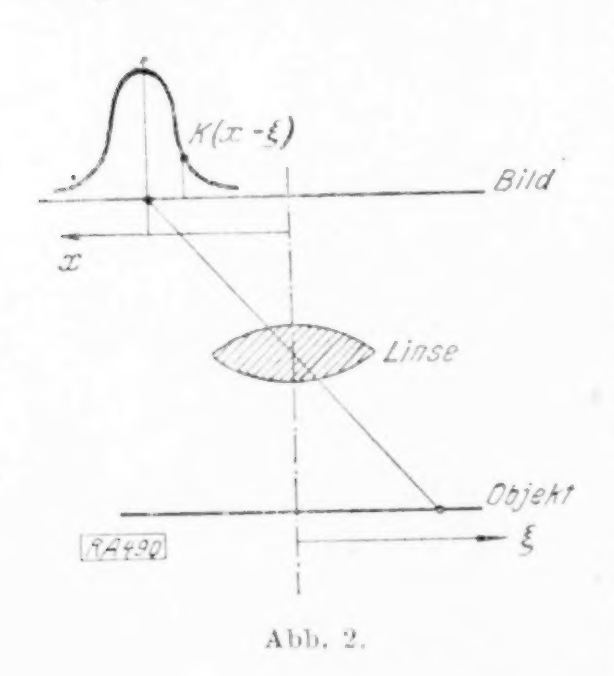


Abb. 2.

Bekanntlich lehrt die geometrische Optik, daß durch ein System von Linsen, wie es etwa ein Fernrohr oder ein Mikroskop aufweist, jedem selbstleuchtenden oder beleuchteten »Objekt« derart ein »Bild« zugeordnet wird, daß Objekt- und Bildpunkte einander umkehrbar eindeutig entsprechen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, Gegenstand und Bild beständen je aus einer einfachen, senkrecht zur optischen Achse stehenden geraden Linie (Abb. 2), deren Punkte mit den Abszissen ξ bezw. x verschiedene Helligkeiten aufweisen, und die geometrische Optik führe zu dem Schluß, es seien Bild und Gegenstand einander ähnlich; es gehe also das Bild aus dem Objekt dadurch hervor, daß dieses in seiner Längserstreckung gedehnt oder verkürzt wird und etwa noch alle Helligkeiten einander proportional verändert werden. Wählt man dann geeignete, durch das Vergrößerungs- oder Verkleinerungsverhältnis bestimmte Maßstäbe für x und ξ, und verfügt passend über die Anfangspunkte und den Richtungssinn der Koordinaten, so kann man erreichen, daß die ideelle Abbildung der geometrischen Optik durch die Gleichung

$$x = \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dargestellt wird, d. h. daß entsprechende Punkte von Bild und Gegenstand in dem gewählten Koordinatensystem gleiche Abszissen haben.

Nun weiß man aber — und hier greift die physikalische Optik ein — daß ein einzelner leuchtender oder beleuchteter Punkt bei einem realen optischen Instrument keineswegs einen einzelnen Punkt als Bild liefert. Ihm entspricht vielmehr, wesentlich beeinflußt durch das den Strahlengang begrenzende Diaphragma, als Abbildung eine bestimmte Helligkeitsverteilung über die ganze Bildlinie (Beugungsbild), die an der Stelle des ideellen geometrischen Bildes $x = \xi$ nur einen mehr oder weniger stark ausgeprägten Höchstwert besitzt. Hat der Objektpunkt mit der Abszisse ξ_1 die Helligkeit 1, so ruft er im Bild an der Stelle x eine Helligkeit hervor, die von der Differenz $x - \xi_1$, d. i. von der Entfernung der Stelle x vom ideellen Bildpunkt $x_1 = \xi_1$ abhängt und durch irgend eine, im Nullpunkt ihren Höchstwert erreichende, gerade Funktion K dieser Differenz dargestellt werden wird. Ist die Helligkeit des Gegenstandes nicht 1, sondern y_1, so ist die des Bildes an der Stelle x gleich $y_1 K(x - \xi_1)$. Gesetzt, das ganze Objekt bestände aus n leuchtenden Punkten mit den Helligkeiten $y_1, y_2 \ldots y_n$ an den Stellen

[1]) Nach L. Mandelstam, Festschrift für H. Weber, Leipzig 1912, S. 228 bis 241.

$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, dann entsteht durch Uebereinanderlagerung der Einzelbilder der n Punkte an der Stelle x des Bildes die Helligkeit

$$\sum_{\iota=1}^{n} y_\iota K(x-\xi_\iota) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Bezeichnen wir den Wert der Funktion K an der Stelle $\xi_\iota - \xi_\varkappa$ kurz mit $K_{\iota\varkappa}$, so hat die Helligkeit des Bildes an den Stellen $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2 \ldots x_n = \xi_n$, die nach den Anschauungen der geometrischen Optik **allein** hervortreten würden, die Werte

$$y_\varkappa' = \sum_{\iota=1}^{n} y_\iota K_{\iota\varkappa}, \qquad \varkappa = 1, 2 \ldots n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Dieser Ansatz weist vollkommene Analogie mit dem oben unter (4) besprochenen auf.

Man braucht sich nun nur vorzustellen, daß die leuchtenden Objektpunkte näher und näher aneinander rücken und schließlich eine stetige Helligkeitsverteilung ergeben, die durch die Intensität $y(\xi)$ pro Längeneinheit an der Stelle ξ gemessen wird. Daraus entsteht dann eine Helligkeit im Bilde an der Stelle x von der Größe

$$y'(x) = \int_a^b K(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

wo a und b die Grenzen des Objektes angeben. Von dem allgemeinen Ansatz (5) unterscheidet sich (9) nur dadurch, daß die dort ganz willkürlich gelassene Funktion K zweier Variablen x, ξ hier die spezielle Form einer Funktion der Differenz $x-\xi$ angenommen hat. Untersucht man z. B. den Fall eines rechteckigen Diaphragmas, so hat man für K das **Fraunhofersche** Beugungsbild des Rechteckes einzuführen

$$K(x-\xi) = C\,\frac{\sin^2 a\,(x-\xi)}{x-\xi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

wobei a durch die Wellenlänge des Lichtes und die Breite des Rechteckes bestimmt wird.

Welches sind nun die Aufgaben, die auf diesem Gebiet in den Bereich der Integralgleichungstheorie fallen? Einmal kann man das Bild y' als gegeben ansehen und nach dem zugehörigen Objekt y fragen, hat also in (9) y' als bekannte, y als unbekannte Funktion: Dies nennt man eine Integralgleichung »**erster Art**«. Interessanter ist aber die Frage: Welche Objekte werden **ähnlich** abgebildet, d. h. so, daß das Bild aus dem Objekt lediglich durch proportionale Veränderungen aller Helligkeiten hervorgeht? Man hat dann $y(x) = \lambda y'(x)$ zu setzen und in

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

eine **homogene** Integralgleichung »**zweiter Art**« zu lösen, in der λ, das Helligkeitsverhältnis zwischen Objekt und Bild, einen noch unbekannten Parameter darstellt. Nimmt man endlich an, was hier freilich als eine etwas gekünstelte Fragestellung erscheinen wird, daß die Differenz zwischen der Helligkeit des Objektes und einem bestimmten Vielfachen der Bildhelligkeit gegeben ist, so liegt in

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

die allgemeine, **nichthomogene** Integralgleichung **zweiter Art** vor. Es wird im weiteren Verlauf dieses Abschnittes unsere Sache sein, der Lösung der so angedeuteten Aufgaben näherzutreten. An dieser Stelle handelt es sich uns nur darum, eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhang zwischen den physikalischen Fragestellungen und den analytischen Begriffsbildungen zu gewinnen.

Zwei weitere physikalische Probleme, die sich der hier dargelegten Auffassung unterordnen, seien nur kurz erwähnt. In der kinetischen Theorie der **Diffusion** nimmt man auf Grund gewisser wahrscheinlichkeits-theoretischer Erwägungen an, daß eine große Zahl von kleinen, suspendierten Teilchen in dem der Diffusion ausgesetzten Körper, die

von einer bestimmten Stelle ξ des Ausgangsniveaus ihren Weg nehmen, im Endniveau in einer Verteilung ankommen, die dem Gaußschen Fehlergesetz

$$K(x-\xi) = \text{konst. } e^{-h^2(x-\xi)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

entspricht. Sind die Teilchen ursprünglich mit der Dichtigkeit $y(\xi)$ über die Breite der Ausgangsschichte verteilt, so wird durch (9) die Verteilung $y'(x)$ in der Endschichte angegeben, und es lassen sich hier die gleichen Fragen wie bei der optischen Abbildung stellen, nur daß der Kern (13) an Stelle von (10) tritt. Die Ausdehnung auf zwei unabhängige Veränderliche liegt hier auf der Hand, man hat statt (9):

$$y'(x_1, x_2) = \int K(x_1, x_2;\, \xi_1, \xi_2)\, y(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1, d\xi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

zu setzen, das Integral über alle Punkte der Ausgangsschicht erstreckt, mit

$$K(x_1, x_2;\, \xi_1, \xi_2) = \text{konst. } e^{-h_1^2(x_1-\xi_1)^2 - h_2^2(x_2-\xi_2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14').$$

Noch umfassender ist der Ansatz der kinetischen Gastheorie, in der das Verteilungsgesetz der Gasmoleküle als Funktion von sieben Veränderlichen (drei Koordinaten, drei Geschwindigkeitskomponenten und Zeit) dadurch bestimmt wird, daß es sich bei der Transformation durch die Zusammenstöße selbst reproduzieren soll. Es scheint, daß bei dem gegenwärtigen Ausbau der physikalischen Statistik derartige Fragestellungen wachsende Bedeutung gewinnen.

Das Gemeinsame der in diesem Abschnitt angedeuteten Integralgleichungsprobleme liegt, gegenüber den nun zu besprechenden, auch darin, daß für die gesuchten Funktionen keine sie bestimmenden Differentialgleichungen bekannt sind, sondern die Integralgleichung selbst als der unmittelbare und natürliche Ansatz des physikalischen Problems erscheint.

3. Verwendung der Greenschen Funktion. Die bisher ausgedehnteste Anwendung der Integralgleichungen in der theoretischen Physik besteht darin, daß unter Zuhilfenahme der sogenannten Greenschen Funktion die Lösung eines Randwertproblems einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung auf die Lösung eines ebensolchen, aber vereinfachten Problems zurückgeführt wird[1]. Wir wollen uns dies an dem Beispiel eines geraden elastischen Stabes, der in zwei Punkten $x = a$ und $x = b$ fest gelagert ist und durch Kräfte senkrecht zu seiner Achse belastet wird (Abb. 3), klarmachen (vergl. dazu X, § 1).

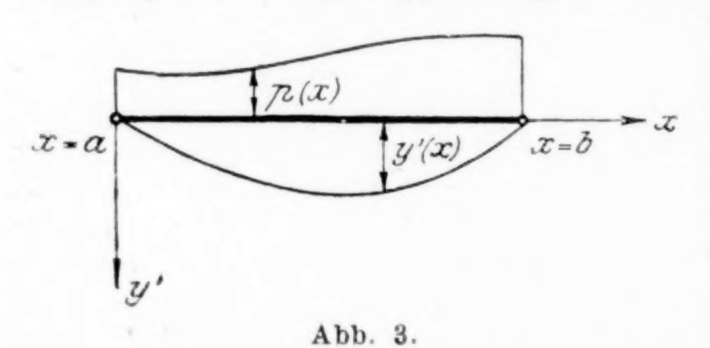


Abb. 3.

Nennen wir W den Biegungswiderstand (Produkt aus Elastizitätszahl E und Querschnitts-Trägheitsmoment T), p die Belastung auf die Längeneinheit und y' die Durchbiegung an der Stelle x, so folgt y' als Funktion von x den Bedingungen

$$\frac{d^4 y'}{dx^4} = \frac{p}{W} \text{ für } a \leq x \leq b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15);$$

$$y' = 0,\; \frac{d^2 y'}{dx^2} = 0 \text{ für } x = a \text{ und } x = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15').$$

Denn nach der Kirchhoffschen Theorie der Elastica, oder wie man in der Technik zu sagen pflegt, nach der Navierschen Biegungstheorie, ist die zweite Ableitung von y' gleich dem durch W dividierten Biegungsmoment M, die zweite Ableitung von M gleich p. An den freien Enden des Balkens muß $M = 0$ sein. Dabei kann p, wenn es sich um einen Bewegungszustand handelt, noch Trägheitskräfte umfassen und jedenfalls außer von x auch von y' abhängen.

Statt nun dieses Problem unmittelbar in Angriff zu nehmen, geht man von dem einfachen Fall aus, in dem die ganze Belastung des Stabes aus einer an der Stelle $x = \xi$ angreifenden Einzelkraft von der Größe 1 besteht (Abb. 4). Dann ist rechts und links von $x = \xi$ für p Null zu setzen, so daß y' in jedem der beiden Stabteile zufolge (15) eine ganze Funktion dritten Grades ist. Die acht Konstanten dieser beiden Funktionen bestimmen sich aus den in (15') angeführten Bedingungen für $x = a$ und $x = b$ (zusammen

[1]) Von der Greenschen Funktion war schon in VII, § 3 die Rede. Ausführlicher wird dieser Begriff, der auch im letzten Abschnitt des Buches eine große Rolle spielt, in XIII, § 2 erläutert werden.

vier Bedingungen), sowie aus der Forderung stetigen Ueberganges von y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx^2}$ an der Stelle $x = \xi$, endlich aus dem Umstande, daß $\frac{d^3y'}{dx^3}$ hier einen Sprung von der Größe $1 : W$, entsprechend der konzentrierten Last 1, erfahren muß; denn einmalige Integration der beiden Seiten von (15) zeigt, wenn W konstant angenommen wird, daß die Differenz der $\frac{d^3y'}{dx^3}$-Werte von irgend zwei Stellen der durch W dividierten, zwischen den beiden Stellen liegenden Gesamtlast gleich ist. Die Ausrechnung führt, wenn wir die außer von x auch noch von ξ abhängige Ausbiegung mit $K(x, \xi)$ bezeichnen, zu

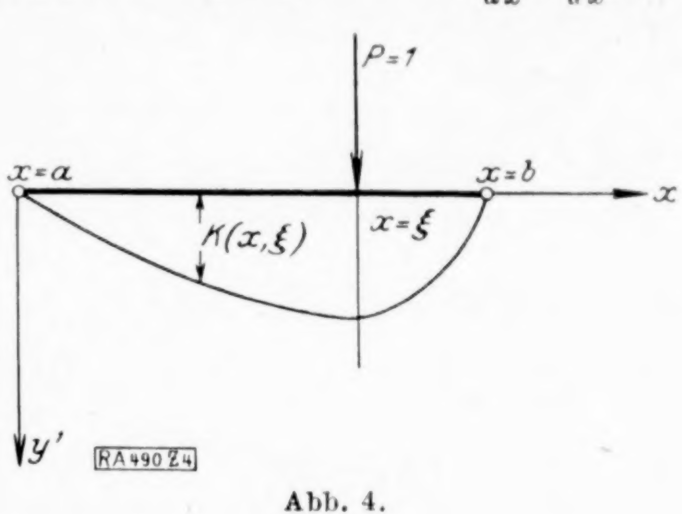


Abb. 4.

$$\left.\begin{aligned} K(x, \xi) &= \frac{(x-a)(\xi-b)}{6(b-a)W}(x^2 + \xi^2 - 2ax - 2b\xi + 2ab) \text{ für } x \leqq \xi \\ &= \frac{(\xi-a)(x-b)}{6(b-a)W}(x^2 + \xi^2 - 2a\xi - 2bx + 2ab) \text{ für } x \geqq \xi \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16).$$

Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen, daß die angeführten acht Bedingungen hier erfüllt sind. Die Funktion $K(x, \xi)$, d. i. die Durchbiegung an der Stelle x herrührend von einer Last 1 an der Stelle ξ, heißt in der Technik die »Einflußfunktion«, in der Physik die »Greensche Funktion« des Problems (15), (15')[1]).

Besteht die Belastung aus n Einzelkräften $P_1, P_2 \ldots P_n$, die an den Punkten $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ angreifen, so ergibt sich die Durchbiegung y' an der Stelle x durch Uebereinanderlagerung der n Bestandteile:

$$y'(x) = \sum_{\iota=1}^{n} K(x, \xi_\iota) P_\iota.$$

Kehren wir zu dem allgemeinen durch p definierten Belastungsfall zurück, so wird die Durchbiegung y' an der Stelle x durch die Uebereinanderlagerung der durch die $p\,d\xi$ bestimmten Biegungen gewonnen:

$$y'(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Eine Integralgleichung erster Art würde entstehen, wenn zu gegebener Durchbiegung die Belastung zu suchen wäre. Hier ist aber folgende Fragestellung die natürlichere, die auf eine Gleichung zweiter Art führt. Der Stab habe an der Stelle x die Masse μ pro Längeneinheit und vollführe, im übrigen unbelastet, eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $y(x)$ und der Frequenz $\varkappa$, so daß $y' = y \sin \varkappa t$. Dann ist die Belastung durch Trägheitskräfte

$$p(x) = -\mu(x)\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = -\mu(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(y \sin \varkappa t) = \varkappa^2 \mu(x)\, y(x) \sin \varkappa t \quad . \quad . \quad (18),$$

und Gl. (15) geht nach Kürzung durch $\sin \varkappa t$ über in

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \varkappa^2 \frac{\mu(x)}{W} y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

mit den gleichen Randbedingungen wie oben (15'). Die Ausschläge y genügen daher der homogenen Integralgleichung erster Art:

$$y(x) = \varkappa^2 \int_a^b K(x, \xi)\, \mu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

die man erhält, wenn man in (17) für p den Wert aus (18) setzt und durch $\sin \varkappa t$ kürzt; gegenüber (11) ist nur $K \cdot \mu$ an Stelle von K und $\varkappa^2$ an Stelle von λ getreten. Die

[1]) Der Zusammenhang zwischen dem »Kern« einer Integralgleichung und der in der technischen Statik gebräuchlichen »Einflußfunktion« ist zum erstenmal von mir in der Arbeit »Ueber die Stabilität rotierender Wellen«, Monatsh. f. Mathem. u. Physik, 1911, Bd. 22, S. 33 bis 52 dargelegt worden.

$\varkappa$-Werte, für die (20) Lösungen besitzt, liefern die **Frequenzen** der freien Schwingungen des Stabes, die zugehörigen Lösungen $y(x)$ belehren über die **Schwingungsformen**. Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen gelangt man, wenn p einen additiven Bestandteil von der Form $\varphi(x) \sin \varkappa t$ enthält (wo also φ die Amplitude der erzwingenden Kraft), so daß (20) sich zu einer **nichthomogenen Integralgleichung zweiter Art**, analog (12) erweitert:

$$y(x) - \varkappa^2 \int_a^b K(x, \xi)\, \mu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

mit

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21')$$

als gegebener Funktion von x. Nimmt man an, daß der Stab selbst masselos ist und nur an den n Stellen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ Punktmassen $m_1, m_2 \ldots m_n$ trägt, so erhält man statt der Integrale in (20) und (21) entsprechende Summen über n Summanden und statt der Integralgleichungen Systeme von n linearen Gleichungen mit den Unbekannten $y_1, y_2 \ldots y_n$.

Von dem Typus der hier behandelten Aufgabe sind alle Probleme elastischer Schwingungen und alle Probleme der Stabilität elastischen Gleichgewichts wie sie in VII als Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt werden. Die Ausdehnung auf zwei oder mehr unabhängig Veränderliche stößt auf keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Aber auch die Theorie der **Wärmeleitung** läßt sich ohne weiteres hier einordnen, wenn man von der Temperaturverteilung $K(x, \xi)$ ausgeht, die im Punkte x von einer Wärmequelle 1 an der Stelle ξ eines linearen Leiters hervorgerufen wird. — Auf alle diese Ansätze und ihre Durchführung kommen wir teils in den folgenden Kapiteln, teils im zweiten Bande noch zurück.

4. Potential. Die dritte, ebenfalls sehr wichtige Form der Anwendung von Integralgleichungen in der Physik betrifft die Probleme der Potentialtheorie. Wir erläutern sie an dem Beispiel der sogenannten **Dirichletschen** Fragestellung für das logarithmische Potential: Es soll eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

gefunden werden, die im Innern eines gegebenen, einfach zusammenhängenden Bereiches stetig ist und auf seinem Umfang S die vorgeschriebenen Werte $f(s)$ annimmt. Dabei bedeutet s die auf der Randkurve von irgend einem ihrer Punkte aus gemessene Bogenlänge nach einem beliebigen Randpunkt; von der Randkurve selbst setzen wir hier der Einfachheit halber voraus, daß sie an jeder Stelle eine eindeutige Tangentenrichtung be-sitzt (Abb. 5).

Abb. 5.

Bezeichnen ξ, η die Koordinaten des Randpunktes $s = \sigma$ und x, y die laufenden Koordinaten im Innern des Bereiches, so überzeugt man sich leicht, daß die Funktion $\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \eta}{x - \xi}$ bei festem ξ, η der Differentialgleichung (22) genügt[1]. Ihres linearen Charakters wegen genügt dieser Gleichung daher auch jede lineare Kombination solcher Ausdrücke:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \eta_i}{x - \xi_i},$$

die dadurch gebildet wird, daß man jedem der n Punkte $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \ldots \xi_n, \eta_n$ des Randes eine »Masse« $c_1, c_2 \ldots c_n$ zuschreibt. Setzt man ferner

$$K(x, y; \sigma) = \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{d\vartheta}{d\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

[1] Man kann dies natürlich durch Einsetzen in (22) bestätigen. Man sieht es aber unmittelbar ein, wenn man an den Zusammenhang von (22) mit den Funktionen komplexer Variablen denkt (vergl. III, § 1, 3) und beachtet, daß dieser Winkel ϑ mit i multipliziert den imaginären Bestandteil von $\log \operatorname{nat} [x + iy - (\xi + i\eta)]$ gibt.

so ist auch diese Funktion von x, y bei festem ξ, η eine Lösung von (22) (denn sie ist als Differenz, also auch als lineare Verbindung zweier ϑ aufzufassen) und demgemäß auch die »lineare Kombination« von unendlich vielen solchen Ausdrücken:

$$u(x, y) = \int \nu(\sigma) K(x, y; \sigma) d\sigma = \int \nu(\sigma) d\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

wo $\nu(\sigma)$ eine zunächst willkürliche »Belegung« des Randes bezeichnet und das Integral über den ganzen geschlossenen Rand zu erstrecken ist. Die zweite Form des Integrals ist der Anschaulichkeit wegen hinzugefügt, sie soll zum Ausdruck bringen, daß die Belegung $\nu(\sigma)$ im Sinne von (23) über den Winkel $d\vartheta$ zu integrieren ist, unter dem das Bogenelement $d\sigma$ von dem betreffenden Punkt x, y aus gesehen wird.

Die Integrale in (24) werden »uneigentlich«, wenn man sie für einen Punkt x, y bildet, der selbst auf dem Rande liegt, weil dann der Integrand, wie (23) zeigt, für $\xi = x$, $\eta = y$ unendlich wird. Nach der üblichen Definition uneigentlicher Integrale erhält man den Wert des mit dem Symbol $\int \nu(\sigma) K(x, y; \sigma) d\sigma$ bezeichneten Ausdrucks, indem man beiderseits der Unendlichkeitsstelle von K ein Stück von der Länge ε aus dem Integrationsgebiet ausscheidet und dann zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergeht. Aber der Sinn des Ansatzes (24) als Lösung von (22) geht dahin, daß die tatsächliche Summe aller Anteile $\nu(\sigma) d\vartheta$ gebildet wird. Die bei der Integration definitionsgemäß ausscheidende Bogenstrecke von $s - \varepsilon$ bis $s + \varepsilon$ wird vom Punkte s aus, in der Grenze für $\varepsilon = 0$, unter dem Winkel $180^0 = \pi$ gesehen, liefert demnach den Beitrag $\nu(s) \cdot \pi$, der zu dem Wert des uneigentlichen Integrals hinzugefügt werden muß. Für einen Randpunkt, der durch die Koordinaten x_s, y_s bezw. durch die Bogenlänge s festgelegt erscheint, stellt sich also der Wert der mit (24) angesetzten Lösung in der Form

$$\pi \nu(1) + \int K(s, \sigma) \nu(\sigma) d\sigma$$

dar, wenn jetzt der Kürze halber $K(s, \sigma)$ für $K(x_s, y_s; \sigma)$ geschrieben wird. Das Endergebnis dieser Betrachtung besteht darin, daß das Dirichletsche Problem auf die Lösung der nichthomogenen Integralgleichung zweiter Art

$$\pi \nu(s) + \int K(s, \sigma) \nu(\sigma) d\sigma = f(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

hinausläuft, in der ν eine unbekannte Randbelegung, f die vorgeschriebenen Randwerte von u bezeichnet, während der »Kern« $K(s, \sigma)$ durch (23) definiert erscheint. Kennt man ν für alle Randpunkte, so ist die verlangte Lösung $u(x, y)$ von (22) mit den Randwerten f durch Ausführung der in (24) angegebenen Quadratur zu finden

Man sieht, daß hier — in der Potentialtheorie — die wesentliche Leistung der Integralgleichung darin liegt, daß die Aufsuchung einer Funktion von zwei Veränderlichen auf die Bestimmung einer Funktion mit einer unabhängig Variablen reduziert wird. Zudem ergibt sich für die Ermittlung dieser Funktion genau der gleiche Ansatz, wie er oben beispielsweise für die erzwungene Schwingung eines elastischen Stabes gefunden wurde, trotzdem das ursprüngliche analytische Problem in beiden Fällen ein ganz verschiedenes war. Auch alle anderen Randaufgaben der Potentialtheorie, sowohl für ebene Gebiete (logarithmisches Potential) wie für räumliche (Newtonsches Potential), lassen sich in gleicher Weise behandeln und führen jedesmal auf Integralgleichungen für ein- bezw. zweidimensionale Randbelegungen Diese Fragen werden im XIV. Kap. ausführlicher besprochen werden.

II. Unmittelbar lösbare Fälle.

1. Ein mechanisches Problem von Abel. Zu einem besonders einfach lösbaren Fall einer Integralgleichung ist Abel durch Betrachtung der folgenden mechanischen Aufgabe gelangt. Ein materieller Punkt m bewege sich unter dem Einfluß der Schwere auf einer glatten, in einer Vertikalebene liegenden Kurve. Die Zeit t, die m braucht, um aus einer Höhe x längs der Kurve zu deren tiefsten Punkt zu gelangen, sei eine gegebene Funktion von x; wie muß die Kurve beschaffen sein? Bekanntlich erhält man für $t =$ konst. (Tautochrone) eine »gemeine Cykloide«[1]).

[1]) Radkurve, die von den Peripheriepunkten eines in gerader Richtung rollenden Rades beschrieben wird; ihre Gleichung in Parameterform lautet:

$$x = 2a \sin\tau \cos\tau + 2a\tau, \qquad y = 2a \sin^2\tau,$$

wobei τ den Tangentenwinkel bedeutet. Die Cykloide ist auch die Lösung des Variationsproblems, die Kurve raschesten Falles zwischen zwei Punkten anzugeben (Brachistochrone V., § 1, 2 u. 4).

Bezeichnet (Abb. 6) ξ die Höhe eines beliebigen Kurvenpunktes, τ den Tangentenwinkel, g die Schwerebeschleunigung, so ist die Geschwindigkeit in ξ:

$$\sqrt{2\,g\,(x-\xi)} = -\frac{1}{\sin\tau}\frac{d\xi}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

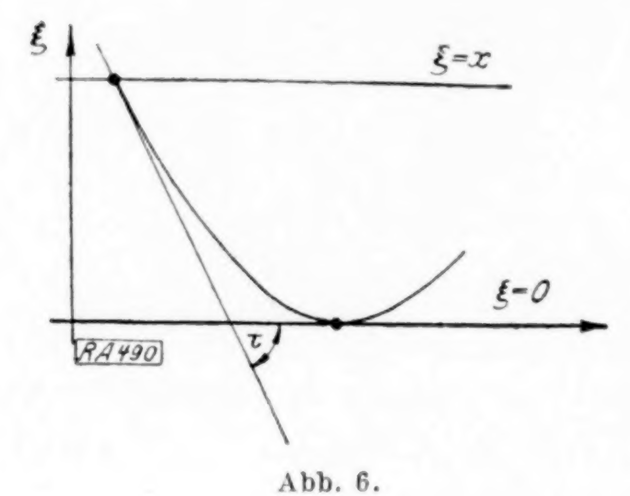


Abb. 6.

also die Fallzeit von $\xi = x$ nach $\xi = 0$:

$$t\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,g}}\int_0^x \frac{1}{\sin\tau}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \quad \ldots \quad (2).$$

Man sieht, daß durch Vorgeben eines Zeitgesetzes der Tangentenwinkel τ als Funktion der Ordinate ξ durch eine Integralgleichung erster Art bestimmt wird. Für $t =$ konst hat man

$$\sin\tau = \frac{\pi}{t}\sqrt{\frac{\xi}{2\,g}} \quad \ldots \quad (3),$$

wie men sich durch Einsetzen mit Rücksicht auf

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{(b-\xi)\,(\xi-a)}} = \pi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

überzeugt.

Im allgemeinen Fall stellt (2) bei gegebenem $\sqrt{2g}\,t = f\,(x)$ und unbekanntem cosec $\tau = y\,(\xi)$ eine Integralgleichung erster Art für y dar, deren Kern $K\,(x, \xi)$ definiert ist durch

$$\left.\begin{aligned} K\,(x,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \quad \text{für } \xi \leq x \\ K\,(x,\xi) &= 0 \qquad\quad \text{für } \xi > x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Wir wollen annehmen, daß $f\,(x)$ samt seiner ersten Ableitung im ganzen Bereich stetig sei. Die Lösung der Integralgleichung

$$f\,(x) = \int_0^\infty K\,(x,\xi)\,y\,(\xi)\,d\xi = \int_0^x \frac{y\,(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

mit den Werten (5) für K ist leicht zu erraten, wenn man (4) ins Auge faßt. Schreibt man in (4) x für b und z für a, multipliziert mit einer willkürlichen Funktion $\varphi\,(z)$ und integriert von 0 bis x, so entsteht

$$\pi\int_0^x \varphi\,(z)\,dz = \int_0^x \varphi\,(z)\,dz \int_z^x \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)\,(\xi-z)}} = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\int_0^\xi \frac{\varphi\,(z)\,dz}{\sqrt{\xi-z}} \quad \ldots \quad (7).$$

Will man also (6), zunächst unter der Voraussetzung $f\,(0) = 0$, erfüllen, so muß man nur $\pi\,\varphi$ mit der ersten Ableitung f' von f identifizieren und

$$y\,(\xi) = \int_0^\xi \frac{\varphi\,(z)\,dz}{\sqrt{\xi-z}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\xi \frac{f'\,(z)\,dz}{\sqrt{\xi-z}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

setzen, denn dann steht links in (7) nichts anderes als $f\,(x)$ und rechts genau die rechte Seite von (6). Hat man aber $f\,(0) \neq 0$, so muß man zu (8) noch die Cykloidenlösung mit $\sqrt{2g}\,t = f\,(0)$ hinzufügen, also endgültig:

$$y\,(\xi) = \frac{1}{\sin\tau} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f\,(0)}{\sqrt{\xi}} + \int_0^\xi \frac{f'\,(z)\,dz}{\sqrt{\xi-z}}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Daß dies eine Lösung von (6) ist, sofern das Integral rechts existiert, erkennt man natürlich auch durch Einsetzen; daß es die einzige, wenigstens bei Beschränkung auf Stetigkeit, Realität usw., ist, folgt daraus, daß die Differenz zweier verschiedener Lösungen für dasselbe f eine Lösung für $f = 0$ sein müßte, die aber mechanisch offenbar unmöglich ist.

Wenn wir das Abelsche Problem in die im vorangehenden Paragraphen aufgeführten Gruppen einordnen wollten, so müßten wir sie wohl der ersten zurechnen. Das Zeitgesetz $t(x)$ erscheint hier gewissermaßen als Transformation des Winkelgesetzes cosec $\tau(\xi)$. Jedenfalls ist keine Differentialgleichung bekannt, die die durch (6) dargestellte Verknüpfung zwischen den Funktionen f und y wiedergeben würde. Im übrigen ist die Art der Fragestellung, mit der man es hier zu tun hat, eine ziemlich vereinzelte.

Eine Variante von (6) ist die Integralgleichung erster Art:

$$f(x) = \int_0^x \frac{y(\xi)\, d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6')$$

und eine Verallgemeinerung die Gleichung

$$f(x) = \int_0^x \frac{y(\xi)\, d\xi}{(x - \xi^\nu)}, \qquad 0 < \nu < 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6'').$$

Die Lösung von (6') findet man auf Grund der elementar nachweisbaren Quadraturformel

$$\int_z^x \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}\sqrt{\xi^2 - z^2}} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4')$$

in ganz gleicher Weise wie oben zu

$$y(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[f(0) + \xi \int_0^\xi \frac{f'(z)\, dz}{\sqrt{\xi^2 - z^2}}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8').$$

Analog folgt aus dem bestimmten Integral

$$\int_z^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-\nu}(\xi - z)^\nu} = \frac{\pi}{\sin \nu\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4'')$$

die Lösung der Integralgleichung (6'') in der Form

$$y(\xi) = \frac{\sin \nu\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\xi^{1-\nu}} + \int_0^\xi \frac{f'(z)\, dz}{(\xi - z)^{1-\nu}}\right].$$

2. Kern vom Typus eines Polynoms. Eine umfassende Gruppe unmittelbar lösbarer Integralgleichungen (erster oder zweiter Art), die auch, wie wir später (XII, § 2, **4**) sehen werden, zu dem ganz allgemeinen Fall hinüberleitet, erhält man, wenn der Kern $K(x, \xi)$ sich — wie ein Polynom — additiv aus Gliedern zusammensetzt, deren jedes ein Produkt aus einer Funktion von x in eine solche von ξ ist. Es wird genügen, hier zunächst nur drei Summanden anzusetzen, also etwa

$$K(x, \xi) = s_1(x)\, t_1(\xi) + s_2(x)\, t_2(\xi) + s_3(x)\, t_3(\xi) \quad \ldots \ldots \quad (1);$$

der allgemeine Weg der Lösung wird dabei hinreichend deutlich werden. Die Integralgleichung nehmen wir als von zweiter Art und nichthomogen an:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2);$$

der Fall der Gleichung erster Art gestattet die genau gleiche Behandlung. Setzen wir in (2) den Ausdruck (1) für $K(x, \xi)$ ein und beachten, daß die bestimmten Integrale

$$\int_a^b t_1(\xi)\, y(\xi)\, d\xi = T_1, \quad \int_a^b t_2(\xi)\, y(\xi)\, d\xi = T_2 \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

Konstante sind, so erhält (2) die Form:

$$y(x) = f(x) + \lambda\,[T_1 s_1(x) + T_2 s_2(x) + T_3 s_3(x)] \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

wobei nur noch die Werte von T_1, T_2, T_3 unbekannt sind. Um diese zu finden, multiplizieren wir (4) der Reihe nach mit $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$ und integrieren jedesmal nach x

über das ganze Intervall a bis b. Dann entsteht auf der linken Seite wieder T_1 bezw. T_2 oder T_3, und rechts treten die Zahlen

$$\int_a^b f(x)\, t_\iota(x)\, dx = F_\iota, \quad \int_a^b s_\varkappa(x)\, t_\iota(x)\, dx = A_{\iota\varkappa}, \quad (\varkappa, \iota = 1, 2, 3) \quad . \; . \; . \; (5)$$

auf. Mit diesen Abkürzungen erhält man nun aus (4) genau drei lineare Gleichungen für die drei Unbekannten T_1, T_2, T_3, nämlich:

$$\left.\begin{array}{llll} T_1(1-\lambda A_{11}) & -T_2\lambda A_{12} & -T_3\lambda A_{13} & = F_1 \\ -T_1\lambda A_{21} & +T_2(1-\lambda A_{22}) & -T_3\lambda A_{23} & = F_2 \\ -T_1\lambda A_{31} & -T_2\lambda A_{32} & +T_3(1-\lambda A_{33}) & = F_3 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (6).$$

Löst man diese Gleichungen nach den T_1, T_2, T_3 auf und führt die gefundenen Werte in (4) ein, so hat man damit die vollständige Lösung der Integralgleichung (2). Dabei ist zu beachten, daß die rechten Seiten von (6) nur durch die rechte Seite von (2) bestimmt werden, d. h. der Ansatz (6) ist homogen, wenn (2) es ist. Demnach überträgt sich die »Alternative«, wie sie für lineare Gleichungen in Kap. II besprochen wurde, folgendermaßen auf die Frage der Lösbarkeit der Integralgleichung (2): **Wenn die nur vom Kern K abhängige Determinante**

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & -\lambda A_{13} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & -\lambda A_{23} \\ -\lambda A_{31} & -\lambda A_{32} & 1-\lambda A_{33} \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

von Null verschieden ist, hat die Integralgleichung (2) eine eindeutig bestimmte Lösung für jedes $f(x)$, insbesondere für $f=0$ allein die Lösung $y=0$; wird aber (7) gleich Null — was für höchstens drei voneinander verschiedene λ-Werte eintreten kann — **so gibt es für $f=0$ eine nicht verschwindende, höchstens bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung y und für beliebige f keine Lösung.** Diese »Alternative« ist typisch für alle Integralgleichungsprobleme und wird uns immer wieder begegnen. Sei z. B.

$$K(x,\xi) = 60\,x^2 + 12\,x\,\xi + 6\,\xi^2, \quad a=0, \quad b=1, \quad \text{also}$$
$$s_1 = 60\,x^2, \quad s_2 = 12\,x, \quad s_3 = 6; \qquad t_1 = 1, \quad t_2 = \xi, \quad t_3 = \xi^2,$$

so erhält man nach (5) für die $A_{\iota\varkappa}$ das Schema

20	6	6
15	4	3
12	3	2.

Die Auflösung von (6) für $\lambda = -1$ liefert dann

$$T_1 = \frac{-F_1 + 2F_3}{3}, \quad T_2 = \frac{F_1 + F_2 - 3F_3}{2}, \quad T_3 = \frac{5F_1 - 3F_2 - 5F_3}{6},$$

und demgemäß wird die Lösung der Integralgleichung, wenn noch für die F die Werte aus (5) eingesetzt werden:

$$y(x) = f(x) - (20x^2 + 6x + 5)\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$- (6x - 3)\int_0^1 x f(x)\,dx + (40x^2 + 18x + 5)\int_0^1 x^2 f(x)\,dx.$$

Die Ausnahmewerte von λ ergeben sich als die Nullstellen der Determinante (7), die hier ausgerechnet lautet:

$$2\lambda^3 - 43\lambda^2 - 26\lambda + 1 = 0.$$

Man erkennt ohne weiteres, wie das Verfahren sich gestaltet, wenn K aus einer Summe nicht von 3, sondern von n Gliedern in der Form (1) erscheint: man hat es dann letzten Endes mit einem System von n linearen Gleichungen zu tun. Außer gewöhnlichen Polynomen in x, ξ als Kernfunktionen können z. B. trigonometrische Polynome, also Summen von Ausdrücken wie $\sin a\,x \sin a\,\xi$ usf., in dieser Weise erledigt werden (und natürlich noch weitere Fälle, wenn man die $s(x)$ und $t(\xi)$ irgendwie anders spezialisiert). Bedenkt man nun, daß sehr allgemeine Klassen von Funktionen sich näherungsweise

als Polynome der einen oder der anderen Art darstellen, bzw. als Potenz- oder Fourierreihen entwickeln lassen, so wird man nicht im Zweifel sein, daß das hier dargelegte Lösungsverfahren die Grundlage eines viel allgemeineren wird abgeben können; darauf kommen wir im folgenden Kapitel noch zurück.

3. Die Integralgleichung der trigonometrischen Funktionen. Die Rolle, die die Integralgleichungen zweiter Art bei allen Schwingungsaufgaben spielen (vgl. § 1, **3**), läßt schon erkennen, daß sie bei genügender Spezialisierung auf die einfachen trigonometrischen Funktionen, sinus und cosinus, führen müssen. Um eine homogene Integralgleichung zu erhalten, deren Lösungen die sin und die cos sind, braucht man den Kern $K(x, \xi)$, dessen Variable x, ξ wir von 0 bis 1 laufend denken, nur folgenden drei Bedingungen unterwerfen: 1. Es sei K symmetrisch in bezug auf die beiden Veränderlichen x, ξ, also $K(x, \xi) = K(\xi, x)$; 2. es werde K in jedem der beiden durch die Diagonale $x = \xi$ gebildeten Dreiecke (Abb. 7) durch eine lineare Funktion von x und ξ dargestellt und 3. es erleide die Ableitung von K nach x an der Stelle $x = \xi$ einen endlichen Sprung. Der allgemeinste, diesen Voraussetzungen genügende Ansatz ist:

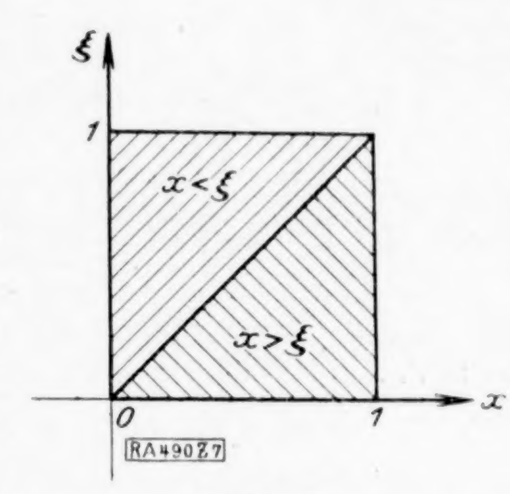


Abb. 7.

$$\left.\begin{aligned} K(x, \xi) &= a\,x\,\xi + b\,x + c\,\xi + d \quad \text{für} \quad x \leq \xi, \\ &= a\,x\,\xi + c\,x + b\,\xi + d \quad \text{für} \quad x \geq \xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

mit $b \neq c$. Differenziert man die Integralgleichung zweiter Art:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

mit dem in (8) gegebenen Ausdruck von K, so muß man das Integrationsintervall in (9) in die beiden Teile $0, x$ und $x, 1$ zerlegen und erhält, wenn jetzt die Ableitungen durch Akzente bezeichnet werden:

$$y'(x) - \lambda \int_0^x (a\,\xi + c)\, y(\xi)\, d\xi - \lambda \int_x^1 (a\,\xi + b)\, y(\xi)\, d\xi = 0 \quad \ldots \quad (9'),$$

denn die Differentiationen nach den Grenzen liefern die Beiträge $\pm K(x, x)\, y(x)$, die einander aufheben. Nochmalige Differentiation von (9') gibt:

$$y''(x) - \lambda\,(ax + c)\, y(x) + \lambda\,(ax + b)\, y(x) = y'' + \lambda\,(b - c)\, y = 0 \quad . \ . \ (9'').$$

Man sieht also, daß die Lösungen von (9) — wenigstens die zweimal differenzierbaren — unter den Integralen der Differentialgleichung (9'') zu suchen sind, mithin die Form

$$y = A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x, \qquad \varkappa = \sqrt{\lambda\,(b - c)} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

besitzen. Die Konstanten A und B sind aber keineswegs willkürlich, wir müssen vielmehr noch überlegen, was wir durch das Differenzieren des ursprünglich gegebenen Ansatzes (9) vorläufig verloren haben. Setzt man zur Abkürzung

$$\lambda \int_0^1 \xi\, y(\xi)\, d\xi = C, \qquad \lambda \int_0^1 y(\xi)\, d\xi = D \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

so führt Einsetzen von (8) in (9) und Spezialisieren auf $x = 0$ bzw. $x = 1$ zu:

$$y(0) = c\,C + d\,D, \qquad y(1) = (a + b)\,C + (c + d)\,D \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

und ebenso, wenn (9') statt (9) benutzt wird,

$$y'(0) = a\,C + b\,D, \qquad y'(1) = a\,C + c\,D \quad \ldots\ldots \quad (12').$$

Aus den vier Gleichungen (12) und (12') lassen sich C und D eliminieren (beispielsweise, indem man durch Subtraktion der beiden letzten voneinander eine Gleichung für D, durch Subtraktion der ersten und vierten von der zweiten eine Gleichung für C allein herstellt, dann die so berechneten C, D in die erste und dritte einsetzt), und daraus entstehen die beiden »Randbedingungen«, denen y noch genügen muß:

$$\left.\begin{aligned} b\,y(0) - c\,y(1) - d\,y'(0) + (c + d)\,y'(1) &= 0, \\ a\,y(0) - a\,y(1) - c\,y'(0) + (a + b)\,y'(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13).$$

Setzt man hier die Lösung (10) ein, so hat man zwei lineare homogene Gleichungen für A und B, die nur dann zusammen bestehen können, wenn ihre Determinante verschwindet; dies gibt, sobald a, b, c, d gegeben sind, eine transzendente Gleichung für $\varkappa$, also auch für λ. Nur für die so ausgezeichneten $\varkappa$- bzw. λ-Werte ist die homogene Integralgleichung (9) lösbar. Statt der allgemeinen Form verfolgen wir besser einzelne besondere Annahmen. Beispielsweise sei $c = d = 0$, $b = 1$ und überdies a) $a = -1$; b) $a = 0$; c) $a = 1$. Die Randbedingungen (13) lauten in diesen Fällen:

$$\text{a) } y(0) = y(1) = 0; \qquad \text{b) } y(0) = y'(1) = 0; \qquad \text{c) } y(0) = 0,\ y(1) = 2y'(1),$$

und die transzendenten Gleichungen, die man durch Einsetzen von (10) in die einzelnen Paare von Bedingungen erhält:

$$\text{a) } \sin\varkappa = 0; \qquad \text{b) } \cos\varkappa = 0; \qquad \text{c) } \operatorname{tg}\varkappa = 2\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die den Bedingungen a) bis c) genügenden Lösungen (10) selbst sind — wenn mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3 \ldots$ die Wurzeln von (14c) bezeichnet werden:

$$\text{a) } \sin\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \sin 3\pi x \ldots; \qquad \text{b) } \sin\frac{\pi}{2}x,\ \sin\frac{3\pi}{2}x,\ \sin\frac{5\pi}{2}x \ldots$$

$$\text{c) } \sin\varkappa_1 x,\ \sin\varkappa_2 x,\ \sin\varkappa_3 x \ldots$$

und demgemäß die ausgezeichneten λ-Werte:

$$\text{a) } \pi^2,\ 4\pi^2,\ 9\pi^2 \ldots; \qquad \text{b) } \frac{\pi^2}{4},\ \frac{9\pi^2}{4},\ \frac{25\pi^2}{4} \ldots; \qquad \text{c) } \varkappa_1^2,\ \varkappa_2^2,\ \varkappa_3^2 \ldots$$

Jedem dieser Fälle und noch vielen anderen entsprechen bestimmte Schwingungsprobleme, von denen noch wiederholt die Rede sein wird; z. B. dem Fall a), die Schwingungen eines an beiden Enden festgehaltenen Seiles. — Wir wollen jetzt auch noch die nichthomogene Integralgleichung mit dem Kern (8) untersuchen.

Steht rechts in (9) noch eine Funktion $f(x)$, die wir als zweimal differenzierbar voraussetzen wollen, so führt zweimalige Differentiation der Gleichung an Stelle von (9'') zu $y'' + \lambda(b - c)y = f''$. Diese Differentialgleichung ist im Hinblick auf bestimmte Randbedingungen in Kap. VII, § 1, **1** behandelt worden. Für uns hat es jetzt Interesse, daß man ihre Lösung in der Form schreiben kann

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wo $\Gamma(x, \xi)$ eine nur von K und λ (aber nicht von f) abhängige Funktion bedeutet, die wir völlig explizit angeben können. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß $f(x)$ den beiden Randbedingungen (13) genügt, d. h. diese Gleichungen erfüllt, wenn darin $f(0)$ für $y(0)$ usf. eingesetzt wird; nur dieser Fall für f hat in den Anwendungen Interesse. Man beachte die anschauliche Bedeutung von Γ. Die Gl. (9) mit $f(x)$ auf der rechten Seite kann aufgefaßt werden als Zuordnung einer Funktion f an eine Funktion y, oder als Transformation von y in f (vergl. I., **1**). Dann liefert (15) die »Umkehrung« dieser Transformation oder die der ersten reziproke Zuordnung von y an gegebene f. Die Funktion $\Gamma(x, \xi)$, der sogenannte »lösende Kern« zu $K(x, \xi)$, ist folgendermaßen definiert: Es genügt Γ als Funktion von x, sowohl im Dreieck $x \leqq \xi$ wie im Dreieck $x \geqq \xi$ (Abb. 5) der Differentialgleichung (9''), d. h. es ist

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \xi) &= A_1 \cos\varkappa x + B_1 \sin\varkappa x = \Gamma_1(x, \xi) \quad \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ &= A_2 \cos\varkappa x + B_2 \sin\varkappa x = \Gamma_2(x, \xi) \quad \text{für} \quad x \geqq \xi \end{aligned} \quad . \quad . \quad (16).$$

Die vier Koeffizienten A_1, A_2, B_1, B_2, die noch von ξ und λ (bzw. $\varkappa$) abhängen, sind so zu bestimmen, daß Γ auch den Bedingungen (13) genügt [wo also $\Gamma_1(0, \xi)$ für $y(0)$, dann $\Gamma_2(1, \xi)$ für $y(1)$ usw. einzusetzen ist], ferner daß für $x = \xi$ beide Ausdrücke Γ_1 und Γ_2 gleiche Werte ergeben, endlich daß die Differenz der Ableitungen an dieser Stelle den Wert $c - b$ ergibt, also

$$\Gamma_1(\xi, \xi) = \Gamma_2(\xi, \xi); \qquad \Gamma_2'(\xi, \xi) - \Gamma_1'(\xi, \xi) = c - b \quad . \quad . \quad . \quad (16').$$

Man sieht, daß der Ausdruck rechts in (15) die Bedingungen (13) erfüllen muß, wenn dies für f und für $\Gamma(x, \xi)$ bei jedem ξ der Fall ist; denn er stellt im wesentlichen eine Uebereinanderlagerung von (unendlich vielen) Funktionen dar, die einzeln den Bedingungen (13) genügen. Weiter folgt durch zweimaliges Differenzieren von (15):

$$y''(x) = f''(x) + \lambda\left[\Gamma_2'(x, x) - \Gamma_1'(x, x)\right] f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15').$$

$$+ \lambda \int_0^x \Gamma_2''(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \lambda \int_x^1 \Gamma_1''(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Für Γ'' kann man mit Rücksicht auf $(9'')$ $-\lambda(b-c)\Gamma$ schreiben, so daß die beiden Integrale rechts zusammen $\lambda(c-b)\cdot\int\limits_0^1 \Gamma(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$ geben. Setzt man hierfür den Wert aus (15) ein und beachtet die zweite Gl. (16'), so wird aus (15'):

$$y''(x) = f''(x) + \lambda(c-b) f(x) + \lambda(c-b)[y(x) - f(x)] = f'' + \lambda(c-b) y,$$

d. h. (15) genügt auch der Differentialgleichung (9'') mit dem Zusatz f'' auf der rechten Seite, w. z. b. w.

Wir geben noch für die drei Spezialfälle a) bis c) die lösenden Kerne vollständig an. Es folgt im Falle a) aus den Bedingungen (13 a), daß $A_1 = 0$ und $A_2 \cos\varkappa + B_2 \sin\varkappa = 0$, ferner aus der ersten Gl. (16'), daß $(B_1 - B_2)\sin\varkappa\xi = A_2\cos\varkappa\xi$, endlich aus der zweiten mit $b - c = 1$, daß $\varkappa(B_1 - B_2)\cos\varkappa\xi + \varkappa A_2 \sin\varkappa\xi = 1$. Die Auflösung dieser vier Gleichungen und der analogen in den Fällen b) und c) liefert:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\ \Gamma_1(x,\xi) = \frac{\sin\varkappa(1-\xi)\sin\varkappa x}{\varkappa\sin\varkappa}, \quad \Gamma_2(x\,\xi') = \frac{\sin\varkappa(1-x)\sin\varkappa\xi}{\varkappa\sin\varkappa};\\
&\text{b)}\ \Gamma_1(x,\xi) = \frac{\cos\varkappa(1-\xi)\sin\varkappa x}{\varkappa\cos\varkappa} = \Gamma_2(\xi,x);\\
&\text{c)}\ \Gamma_1(x,\xi) = \frac{\sin\varkappa x}{\varkappa}\left[\cos\varkappa\xi - \sin\varkappa\xi\,\frac{1+2\varkappa\operatorname{tg}\varkappa}{\operatorname{tg}\varkappa - 2\varkappa}\right] = \Gamma(\xi,x)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17).$$

In allen drei Fällen (und, wie sich zeigen läßt, in allen Fällen beliebiger Wahl von a, b, c, d) bestätigen sich folgende Eigenschaften: Der »lösende« Kern Γ ist symmetrisch (ebenso wie der ursprüngliche K) und er existiert nicht, d. h. er wird durch einen Bruch mit verschwindendem Nenner dargestellt, für solche Werte des Parameters $\varkappa$ bzw. λ, die der transzendenten Gleichung (14) genügen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind also dadurch gekennzeichnet, daß für sie die homogene Integralgleichung (9) lösbar, die nichthomogene aber im allgemeinen nicht lösbar ist, während es sich für alle anderen λ-Werte umgekehrt verhält. Wir kommen auf diese »Alternative« später noch vielfach zurück, deren physikalische Bedeutung durch den Begriff der »Eigenschwingung«, der »erzwungenen Schwingung« und der »Resonanz« gekennzeichnet wird.

4. Andere Darstellungsform des Sinus-Cosinus-Kernes. Wir wollen jetzt dem in **3** betrachteten Kern (8), der zu den sin und cos als Eigenlösungen geführt hat, eine grundsätzlich andere Darstellung geben, wobei wir uns auf den in den Anwendungen wichtigsten und für alle anderen typischen Fall a) beschränken. Unter der Annahme $a = -1$, $b = 1$, $c = d = 0$ lautet (8)

$$K(x,\xi) = x(1-\xi) \text{ für } x \leqq \xi, \qquad K(x,\xi) = \xi(1-x) \text{ für } x \geqq \xi \quad . \quad . \quad (18).$$

Wir entwickeln nun die hierin gegebene Funktion von x im Intervall 0,1 in eine Fouriersche Reihe (IV, § 2). Da die Funktion ungerade ist, kommen nur die sinus-Glieder in Betracht und der Koeffizient von $\sin n\pi x$ ist nach allgemeinen Regeln:

$$a_n = 2(1-\xi)\int\limits_0^\xi x \sin n\pi x\, dx + 2\xi\int\limits_\xi^1 (1-x)\sin n\pi x\, dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi\xi \quad (19),$$

wie man durch Ausführung der elementaren Integrale erkennt. Wir haben also mit (18) gleichbedeutend

$$\left.\begin{aligned}
K(x,\xi) &= \frac{2}{\pi^2}\sin\pi\xi\sin\pi x + \frac{2}{4\pi^2}\sin 2\pi\xi\sin 2\pi x + \ldots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi\xi\sin n\pi x
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (18'),$$

denn die Reihe rechts konvergiert zufolge der Nenner gleichmäßig für alle x und ξ. Der Kern (18') läßt sich nun formal genau so behandeln wie die in **2** betrachteten Kerne vom »Polynomtypus«. Wir setzen (18') in (9) ein, vertauschen die Reihenfolge von Summation und Integration und erhalten:

$$y(x) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\int\limits_0^1 y(\xi)\sin n\pi\xi\, d\xi = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{c_n}{n^2\pi^2}\sin n\pi x \qquad (20),$$

wenn mit c_n die Fourier-Koeffizienten von y bezeichnet werden. Diese Gleichung wird in der Tat befriedigt, wenn man für irgend ein ganzzahliges n setzt: $y(x) = \sin n\pi x$ und $\lambda = n^2\pi^2$, denn für ein solches y sind alle c bis auf das n-te Null und dieses eine hat den Wert 1. Wir haben demnach die Lösungen $\sin \pi x$, $\sin 2\pi x$, $\sin 3\pi x, \ldots$ zu den Parameterwerten $\lambda = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$, wie schon in **3** angegeben. Auch der »lösende Kern« (17a) gestattet eine Entwicklung nach den sinus mit den Koeffizienten

$$\frac{2\sin\varkappa(1-\xi)}{\varkappa\sin\varkappa}\int_0^\xi \sin\varkappa x\sin n\pi x\,dx + \frac{2\sin\varkappa\xi}{\varkappa\sin\varkappa}\int_\xi^1 \sin\varkappa(1-x)\sin n\pi x\,dx.$$

Die etwas umständliche, aber durchaus elementare Rechnung führt, wenn man beachtet, daß $\varkappa^2 = \lambda$, zu

$$\Gamma(x,\xi) = \frac{2\sin\pi\xi\sin\pi x}{\pi^2-\lambda} + \frac{2\sin\pi\xi\sin 2\pi x}{4\pi^2-\lambda} + \ldots, \quad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi\xi\; 2\sin n\pi x}{n^2\pi^2-\lambda} \qquad (21).$$

Man kann sich aber auch unmittelbar überzeugen, daß dieses Γ in (15) eingesetzt die ursprüngliche Integralgleichung (9) mit der rechten Seite f löst. Denn bedeuten $k_1, k_2 \ldots$ die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(x)$, so gibt (21) in (15) eingeführt die Gleichung

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{n^2\pi^2-\lambda}\sin n\pi x \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

und daraus, wenn man die Koeffizienten von $\sin n\pi x$ beiderseits gleichsetzt:

$$c_n = k_n\left(1 - \frac{\lambda}{n^2\pi^2-\lambda}\right) = \frac{n^2\pi^2 k_n}{n^2\pi^2-\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (22').$$

Andererseits liefert nach Hinzufügung von f auf der rechten Seite Gl. (9) oder, was dasselbe ist, Gl. (20), wenn man wieder nur den Koeffizienten von $\sin n\pi x$ betrachtet:

$$c_n = \lambda\frac{c_n}{n^2\pi^2} + k_n, \quad \text{also} \quad c_n = \frac{n^2\pi^2 k_n}{n^2\pi^2-\lambda},$$

übereinstimmend mit (22'). Indem man c_n durch k_n, die Fourier-Koeffizienten der unbekannten Funktion $y(x)$ durch die der bekannten $f(x)$, ausdrückt, löst man die nicht homogene Integralgleichung. Die Gl. (22') oder auch (21) läßt deutlich erkennen, daß die Lösung im allgemeinen nur für solche λ-Werte existiert, die mit keiner der Zahlen $n^2\pi^2$ zusammenfallen. Auf die allgemeine Bedeutung der Entwicklungen (18') und (21) der ursprünglichen und des lösenden Kernes kommen wir in XII, § 2 zurück.

5. Fall mehrerer Veränderlicher. In der jetzt dargelegten Form gestatten die Ergebnisse aus dem Eindimensionalen leicht die Uebertragung auf zwei- (oder mehr-) dimensionale Fragen. Wir betrachten eine unbekannte Funktion u der unabhängigen Veränderlichen x, y, die das Rechteckintervall $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ durchlaufen mögen. Sie sei zunächst der homogenen Integralgleichung zweiter Art

$$u(x,y) - \lambda\int_0^a\int_0^b K(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

unterworfen. Für den Kern K machen wir in Erweiterung von (18') den Ansatz einer doppelt unendlichen Reihe in der Form:

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{4}{ab}\sum_{m,n}^{1,\infty}\frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \quad \ldots \quad (24).$$

Die Lösungen von (23), (24) haben, wie wir gleich zeigen werden, die Gestalt

$$u(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}; \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots \quad \ldots\ldots \quad (25).$$

Denn setzt man (25) und (24) in (23) ein, so fallen bei der Integration alle Summanden von (24) fort mit Ausnahme desjenigen, der gerade die in (25) auftretenden Indizes m, n besitzt, und dieser liefert den Beitrag $a/2 \cdot b/2$, so daß

$$\lambda = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right); \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots \quad \ldots\ldots \quad (25')$$

gewählt werden muß. Mit (25') ist die doppelt unendliche Reihe der ausgezeichneten Parameterwerte (der Eigenwerte) gegeben, für die (23) lösbar ist, mit (25) die entsprechende Reihe dieser Lösungen selbst. Daß es nicht außer (25) noch Lösungen von (23), (24) gibt, folgt aus später abzuleitenden allgemeinen Sätzen (XII, § 3, **3**).

Man kann auch die Entwicklung des »lösenden Kernes« Γ in Analogie zu (21) aufstellen. Dabei ist Γ durch die Forderung bestimmt, daß von den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) - \lambda \int_0^a \int_0^b K(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = f(x,y), \\ f(x,y) + \lambda \int_0^a \int_0^b \Gamma(x,y;\xi,\eta)\, f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = u(x,y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

eine aus der anderen folgen soll. Bezeichnet man wieder mit $c_{m,n}$ bzw. $k_{m,n}$ die Fourier-Koeffizienten von u bzw. f, also

$$c_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy, \qquad k_{m,n} = \int_0^a \int_0^b f(x,y) \ldots dx, dy,$$

so folgt, ebenso wie oben, aus der ersten Gl. (26)

$$c_{m,n} - \lambda \frac{c_{m,n}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - \lambda} = k_{m,n} \qquad c_{m,n} = \frac{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - \lambda} k_{m,n} \qquad (27).$$

Soll die gleiche Koeffizientenbeziehung aus der zweiten Gl. (26) fließen, so muß man Γ so ansetzen:

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \frac{4}{ab} \sum_{m,n}^{1,\infty} \frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - \lambda} \quad \ldots \quad (28),$$

wie man durch Einführung von (28) in (26) sofort erkennt. Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung (23) wird durch (25), (25'), die der nicht homogenen durch (28) geliefert. Wieder erkennt man, daß die letztere Lösung hinfällig wird (verschwindende Nenner ergibt), sobald λ mit einem der Parameterwerte (25') zusammenfällt. Man kann aber darüber hinaus feststellen, daß für besondere Funktionen f das nicht homogene Problem doch lösbar bleibt: wenn nämlich gerade derjenige Fourier-Koeffizient $k_{m,n}$ von f Null ist, in dessen Nenner (27) die verschwindende Differenz auftritt. Auch darauf kommen wir noch wiederholt zurück. Zu einer geschlossenen Form des Kernes gelangt man ebenfalls durch Untersuchungen anderer Richtung. (XIII, § 3.)

Die physikalische Bedeutung der hier besprochenen Integralgleichung ist etwa durch die Schwingungen einer rechteckigen, am Rande eingespannten Membran gegeben.

6. Laplacesche Transformation und Fouriersches Integraltheorem. Laplace hat in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Algorithmus eingeführt, der in das Gebiet der Integralgleichungen erster Art fällt und in engen Beziehungen zu verschiedenen Fragestellungen der mathematischen Physik steht. Wenn wir zunächst eine Reihe positiver Zahlen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ als Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ausfälle eines Versuches (z. B. als Wahrscheinlichkeiten, 1 bzw. 2, bzw. 3 ... zu ziehen) gegeben haben, so läßt sich dieser Reihe eine »erzeugende Funktion« $v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + \ldots$ zuordnen. Es fragt sich, wie man aus der Kenntnis dieser Funktion von t die Einzelzahlen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ zurückgewinnen kann. Setzen wir $t = e^{zi}$, wo $i = \sqrt{-1}$ und z eine neue Variable an Stelle von t ist, und schreiben

$$f(z) = v_1 e^{zi} + v_2 e^{2zi} + v_2 e^{3zi} + \ldots = \sum_x v_x e^{xzi} \quad \ldots \quad (29),$$

so sieht man sofort, daß die Umkehrung von (29) lautet:

$$v_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\, e^{-xzi}\, dz \quad \ldots \ldots \quad (30).$$

Denn wenn man die Summe (29) in (30) einführt, so fallen bei der Integration alle Summanden, deren Exponent ein anderer ist als $x\,z\,i$ fort, weil das Integral von $e^{nzi} = \cos nz + i \sin nz$ verschwindet, und der eine übrig bleibende Summand liefert 2π als Integral.

Nun sei statt der Einzelzahlen $v_1, v_2, \ldots$ eine Funktion $v(x)$ der unabhängig Veränderlichen x gegeben, die wir als stetig und von beschränkter Schwankung voraussetzen wollen. Das Analogon zu (29), die »Laplacesche Transformierte« von $v(x)$, kann jetzt so definiert werden:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\, e^{xzi}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Damit dieses Integral einen Sinn hat, müssen wir noch voraussetzen, daß $v(x)$ im Unendlichen hinreichend stark verschwindet. Die Frage nach der Umkehrung betrifft jetzt die Auflösung der Integralgleichung (31) bei gegebenem f und unbekanntem v. Das Analogon zu (30)

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-xzi}\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

läßt sich zunächst formal durch Einsetzen von (31) in (32), Vertauschung der Integrationsfolge usw. ableiten. Die exakte Grundlage der Lösung (32) von (31) liefert aber das Fouriersche Integraltheorem, IV, § 3, **3**. Unter unseren Voraussetzungen für v gilt nach IV, § 3, (11):

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} v(u) \cos z(u-x)\, du = \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} v(u)\, e^{z(u-x)i}\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xzi}\, dz \int_{-\infty}^{\infty} v(u)\, e^{uzi}\, du.$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite stimmt in der Tat, wenn man (31) beachtet, mit der rechten Seite von (32) überein. Da aber, wie man sich leicht überzeugt, das analog gebildete Integral mit $\sin z(u-x)$ (anstatt cos) verschwindet, so darf man das Zeichen $\Re$ (»Realteil«) auch fortlassen und erhält (32).

Führt man an Stelle von x eine neue Variable y durch $e^x = y$ ein und setzt $v(x) = w(y)$, so erhält man den Zusammenhang von (31) und (32) in der im wesentlichen von Riemann gegebenen Form:

$$f(z) = \int_0^{\infty} w(y)\, y^{zi-1}\, dy, \qquad w(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, y^{-zi}\, dz \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Eine andere, wesentlich gleichwertige Form, die auch den Zusammenhang mit dem Fourierschen Theorem hervortreten läßt, ist die folgende:

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xz \cdot v(x)\, dx, \qquad v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xz \cdot f(z)\, dz \quad . \quad . \quad (34).$$

Die diesen Formeln zugrunde liegenden Ueberlegungen sind gelegentlich angewandt worden zur Berechnung von elektrostatischen Ladungsverteilungen aus gegebenem Potential.

III. Die Idee der unendlich vielen Veränderlichen.

Die Beispiele, deren wir uns in § 1 zur Einführung der Integralgleichungen bedient haben, legen die Auffassung nahe, daß es sich hier darum handelt, Gleichungen mit »unendlich vielen Unbekannten« aufzulösen. So ist etwa in I **3** die Integralgleichung (17) unmittelbar dadurch entstanden, daß wir die Zahl n der (als unbekannt anzusehenden) Einzelkräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ über jede Grenze hinaus anwachsen ließen, indem wir zu einer stetigen Belastung p übergingen. Derartige Betrachtungen sind schon sehr früh von Lagrange (1759) angestellt worden, und Lord Rayleigh (1877) hat sie zu einem praktischen Verfahren für die Behandlung akustischer Probleme ausgebaut. Aber erst die neuere Entwicklung der Theorie der Integralgleichungen hat dem Begriff der unendlich vielen Veränderlichen einen festen Platz in der Analysis geschaffen. Wir wollen im folgenden die verschiedenen Richtungen, in denen der fruchtbare Grundgedanke Ausgestaltung und Anwendung gefunden hat, kurz ins Auge fassen.

t

1. Differenzengleichung. Der einfachste Zusammenhang zwischen Problemen mit endlich vielen und solchen mit unendlich vielen Veränderlichen kommt in dem Verhältnis zwischen Differenzen- (Ketten-) Gleichungen und Differentialgleichungen zum Ausdruck. Wir wollen von dem (dem in I **3** betrachteten analogen) mechanischen Problem eines gespannten Seiles, das in gleichen Abständen n Punktmassen trägt (Abb. 8), ausgehen. Ist S die Seilspannung, h der Abstand je zweier benachbarter Massen $m_1, m_2 \ldots m_n$, so liefert eine kleine Auslenkung y_ι' der ι-ten Masse eine gegen die Gleichgewichtslage zu gerichtete Kraft von der Größe

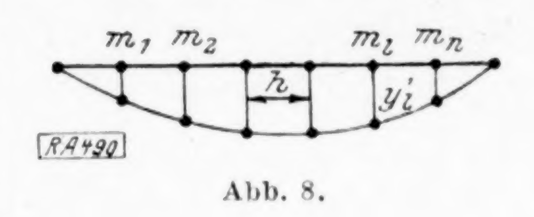


Abb. 8.

$$-S\left(\frac{y_{\iota+1}' - y_\iota'}{h} - \frac{y_\iota' - y_{\iota-1}'}{h}\right) = -\frac{S}{h}\left(y_{\iota+1}' - 2y_\iota' + y_{\iota-1}'\right).$$

Diese Kraft ist der mit m_ι multiplizierten Beschleunigung gleichzusetzen. Nimmt man an, daß der zeitliche Verlauf der Bewegung der einer harmonischen Schwingung ist, $y_\iota' = y_\iota \sin \varkappa t$, so erhält man für die y_ι nach Kürzung durch $\sin \varkappa t$:

$$y_{\iota+1} - 2y_\iota + y_{\iota-1} = -\frac{h\varkappa^2}{S} m_\iota y_\iota, \qquad \iota = 1, 2 \ldots n \text{ mit } y_0 = y_{n+1} = 0 \quad . \quad (1).$$

Dies ist ein linear homogenes Gleichungssystem in n Veränderlichen, dessen Nennerdeterminante mit $\lambda = h\varkappa^2 : S$ lautet:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 2-\lambda m_1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda m_2 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda m_n \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nur wenn diese Determinante verschwindet, besitzt (1) eine nicht identisch verschwindende Lösung (II, § 1, **5**), und die Gleichung $D_{n+1} = 0$ liefert so die λ- bzw. $\varkappa$-Werte, die den Frequenzen der Eigenschwingungen entsprechen. Daß die Wurzeln von (2) alle reell sind, erkennt man daraus, daß (2) die Form der Säkulargleichung II, § 2, (12) erhält, wenn man die ι-te Zeile durch $\sqrt{m_\iota}$, die $\varkappa$-te Spalte durch $\sqrt{m_\varkappa}$ dividiert ($\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots n$). Die zugehörige quadratische Form ist, wie sich zeigen läßt, eine positiv definitive, daher können die Wurzeln nur positiv sein. Mithin folgen aus dem Nullsetzen von (2) in der Tat reelle Frequenzwerte $\varkappa$. Damit ist grundsätzlich das Schwingungsproblem für das aus n Massen bestehende System von n Freiheitsgraden gelöst. Wir wollen die Lösung jetzt so umgestalten, daß sie Schlüsse für den Fall unbegrenzt wachsender n gestattet.

Entwickelt man (2) nach den Elementen der letzten Zeile und bezeichnet man mit $D_n, D_{n-1} \ldots$ die zu (2) analogen Determinanten, die aus den ersten $n-1$ bzw. $n-2 \ldots$ Zeilen und Spalten gebildet werden, so findet man

$$D_{n+1} = (2 - \lambda m_n) D_n - D_{n-1} \text{ oder } D_{n+1} - 2D_n + D_{n-1} = -\lambda m_n D_n \qquad (3),$$

d. h. die Zahlenfolge $D_2, D_3 \ldots$ genügt genau derselben Differenzengleichung wie die ursprünglichen Veränderlichen $y_2, y_3 \ldots$. Vergleicht man aber die aus (2) folgenden Werte für D_2 und D_3 miteinander, so zeigt sich, daß $D_0 = 0$, $D_1 = 1$ gesetzt werden muß, damit (2) mit (3) auch für $n = 1$ und $n = 2$ übereinstimmt. Es bildet daher D_0, $D_1, D_2 \ldots$ eine Lösung von (1) mit der »Anfangsbedingung« $D_0 = 0$ (die zweite Bedingung $D_1 = 1$ ist im Hinblick auf den homogenen Charakter des Problems unwesentlich). Die Gleichung $D_{n+1} = 0$ bringt daher nur die Forderung zum Ausdruck, daß die im Anfangspunkt verschwindende Lösung von (1) auch im Endpunkt verschwindet.

Mit dieser Deutung der Frequenzdeterminante ist zunächst für die Berechnung der Frequenzen noch nichts gewonnen. Nun bemerke man aber zweierlei. Wenn erstens in (3) $\lambda = 0$ gesetzt wird, liegt die Differenzengleichung vor, die durch die Elemente einer beliebigen arithmetischen Reihe und nur durch solche befriedigt wird. Aus den Bedingungen für $\iota = 0$ und $\iota = 1$ folgt dann, daß die D für $\lambda = 0$ die Werte $0, 1, 2, 3 \ldots$ besitzen. Streicht man zweitens in der Determinante (2) die α-te Zeile und α-te Spalte, betrachtet also einen bestimmten Hauptminor $(n-1)$-ter Ordnung, so sieht man, daß er — wofern nur α von 0 und n verschieden ist — als Produkt zweier Determinanten (von den Ordnungen $\alpha - 1$ und $n - \alpha$) der gleichen Form wie (2) erscheint, demnach für $\lambda = 0$ den Wert $\alpha(n + 1 - \alpha)$ besitzt. Dieser Ausdruck bleibt auch noch für $\alpha = 1$ und $\alpha = n$ zutreffend. Ein Hauptminor $(n-k)$-ter Ordnung, der durch Streichen der Zeilen

und Spalten mit den Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ entsteht, ist demgemäß gleich dem Produkt $\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\ldots(n+1-\alpha_k)$, wobei $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_k \leq n$ vorausgesetzt ist. Nun ist die ganze Determinante (2) gewiß ein Polynom n-ten Grades in λ, kann also in der Form

$$D_{n+1} = c_0 - c_1\lambda + c_2\lambda^2 \ldots \pm c_n\lambda^n \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

geschrieben werden. Dabei ist $\pm c_n$ das Produkt $m_1 m_2 \ldots m_n$, c_0 der Wert von D_{n+1} für $\lambda = 0$, also $c_0 = n+1$, und c_k für irgend ein k gleich der Summe aller Ausdrücke von der Form $m_{\alpha 1} \ldots m_{\alpha 2} \ldots m_{\alpha k}$ mal dem durch Streichen der α_1-ten, α_2-ten $\ldots$ α_k-ten Zeile und Spalte entstehenden Hauptminor bei $\lambda = 0$. Mithin:

$$c_k = \sum_{(\alpha)} \alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)\ldots(n+1-\alpha_k)\, m_{\alpha 1} \ldots m_{\alpha 2} \ldots m_{\alpha k}, \quad (k = 1, 2 \ldots n) \quad (4'),$$

die Summation erstreckt über alle Kombinationen ganzer Zahlen, die den Bedingungen $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_k \leq n$ genügen. In dieser Gestalt (4), (4') gestattet der Ausdruck für D_{n+1} einen Grenzübergang zu unendlich großem n, in dem Sinne, wie es dem mechanischen Problem der Schwingung eines stetig mit Masse belegten Seiles entspricht.

2. Uebergang zur Differentialgleichung. Wir behandeln zunächst wieder den in Abb. 6 skizzierten Fall eines mit n Punktmassen belegten, sonst masselosen Seiles. Wenn wir bei einer festen Seillänge l die Abstände $h = l:(n+1)$ zwischen zwei benachbarten Punktmassen mehr und mehr verkleinern, etwa dadurch, daß wir die Zahl $n+1$ sukzessive verdoppeln, so erhält ein bestimmter Punkt des Seiles, der einmal Träger einer Punktmasse war, sukzessive ich verdoppelndes Indizes. Die Masse, die diesem Punkt zugeordnet ist, wollen wir nicht konstant halten, sondern proportional h verkleinern, so daß der Quotient $m_i : h$ — bei konstantem Produkt $i \cdot h$ — einen nur von der Stelle des Seiles abhängigen Wert $\mu(x)$ besitzt. Die Abszissen x seien etwa vom linken Festpunkt des Seiles aus positiv nach rechts gerechnet. Jedesmal, wenn ein n gewählt ist, können wir D_{n+1} nach (4), (4') bestimmen und durch Nullsetzen dieses Ausdrucks gewisse λ-Werte, und daraus ebensoviel $\varkappa$-Werte als Frequenzen der Seilschwingungen ermitteln. Es fragt sich nun, was aus diesen $\varkappa$-Werten wird, wenn wir die Zahl n in der gegebenen Weise ins Unendliche wachsen lassen. Um dies zu erkennen, multiplizieren wir den Ausdruck (4) zunächst mit $h = l:(n+1)$, so daß der erste Koeffizient l wird, und denken uns $\lambda : h$ an Stelle von λ als Variable eingeführt, so daß an Stelle der Koeffizienten c_k neue Koeffizienten gleich $c_k h^{k+1}$ treten. Die Frequenzgleichung lautet dann:

$$l + c_1 h^2\left(-\frac{\lambda}{h}\right) + c_2 h^3\left(-\frac{\lambda}{h}\right)^2 + \ldots c_n h^{n+1}\left(-\frac{\lambda}{h}\right)^n = 0.$$

Hier kann nun der Grenzübergang in den einzelnen Summanden leicht vollzogen werden. Ersetzt man in (4') jedes m durch $\mu \cdot h$, so wird zunächst aus $c_1 h^2$ in der Grenze

$$\sum_{\alpha_1} \alpha_1 h(l-\alpha_1 h)\,\mu(\alpha_1 h)\cdot h \rightarrow \int_0^l x(l-x)\,\mu(x)\,dx,$$

da für $\alpha_1 h$ beim Grenzübergang x zu schreiben ist. Der allgemeine Ausdruck für $c_k h^{k+1}$ geht aus einer k-fachen Summe in ein k-faches Integral über mit dem Integranden

$$x_1(x_2-x_1)(x_3-x_2)\ldots(l-x_k)\,\mu(x_1)\,\mu(x_2)\ldots\mu(x_k).$$

Natürlich bricht die Reihe der Glieder nicht ab, sondern an die Stelle des Polynoms (4) tritt eine Potenzreihe. Wenn wir λ für das bisherige $\lambda : h$ schreiben, also $\lambda = -\varkappa^2 : S$ setzen, und die neuen Koeffizienten mit $C_k = c_k h^{k+1}$ bezeichnen, so erhalten wir schließlich als Frequenzgleichung für den Fall stetig verteilter Massen:

$$\left.\begin{array}{c} C_0 - C_1\lambda + C_2\lambda^2 - \ldots = 0 \quad \text{mit} \\ C_0 = l, \quad C_k = \int_0^{x_1}\ldots\int_{x_{k-1}}^{l} x_1(x_2-x_1)\ldots(l-x_k)\,\mu(x_1)\ldots\mu(x_k)\,dx_1\ldots dx_k \end{array}\right\} \quad (5).$$

Man sieht sehr leicht ein, daß diese Reihe für alle λ gleichmäßig konvergiert, falls $\mu(x)$ beschränkt ist. Hat nämlich $|\mu(x)|$ die obere Schranke M, so ist der zweite Teil des Integranden höchstens gleich M^k, während der erste sein Maximum erreicht für $x_1 = x_2 - x_1 = \ldots l - x_k = 1:(k+1)$, also höchstens gleich $(k+1)^{-k-1}$ wird. Das Integrationsgebiet hat das Volumen $l^k : k!$, demnach ist

$$|C_k| \leq \frac{l^k}{k!}\,\frac{M^k}{(k+1)^k} < \frac{1}{k!}\left(\frac{Ml}{k}\right)^k.$$

Die Koeffizienten nehmen also stärker ab als die Glieder irgend einer fallenden geometrischen Reihe, womit die Konvergenz erwiesen ist. Mittels eines Gedankenganges, der später (XII, § 1) näher ausgeführt werden soll, zeigt man, daß die Werte der Polynome D_{n+1} mit wachsendem n gegen die der Potenzreihen (5) gehen, daß dasselbe für $d\,D_{n+1}/d\,\lambda$ und die Ableitung der Potenzreihe (5) gilt, und daraus nach dem Cauchyschen Satz, daß die Wurzeln von (5) nur Grenzwerte der Nullstellen von (4) sein können.

Man kann sich nun weiterhin auf verschiedene Standpunkte stellen. Sieht man physikalisch die sogenannte stetige Massenverteilung nur als eine sehr dichte Häufung einzelner Massenpunkte an, so ist der hier angedeutete Rechnungsgang die unmittelbar sich darbietende Theorie, und es bedarf keines weiteren Nachweises, daß die Wurzeln von (5) und nur diese die gesuchten Frequenzen darstellen. Etwas anders liegt es, wenn man neben der Punktmechanik, die wir bei unserer Ableitung allein berücksichtigt haben, einen Differentialgleichungsansatz für die gespannte Saite als mechanische Grundlage gelten läßt. Dann erhebt sich das mathematische Problem: Führt die Integration der Differentialgleichung, nämlich die Lösung von

$$y'' = -k^2 \frac{\mu}{S} y, \quad y(0) = y(l) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

(vgl. VII, § 1, **4**), zu dem gleichen Ergebnis wie die bisherige Betrachtung? Man kann nun in der Tat an (6) die parallelen Ueberlegungen anschließen wie an den Ansatz (1), allerdings ohne den Determinantenbegriff, aber mit Verwendung der zweiten Bedeutung von D_{n+1}. Wir skizzieren den Gedankengang, der genau dem in VII, § 2, **2** eingeführten Verfahren der »Grundlösung« entspricht. Nennen wir $U(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (6), die den Anfangsbedingungen $U(0) = 0$ $d\,U(0)/d\,x = 1$ genügt, und setzen wir

$$U(x) = U_0(x) - \lambda\, U_1(x) + \lambda^2\, U_2(x) - \ldots \ldots \quad (7),$$

so führt Einsetzen in (6) mit $\lambda = -\varkappa^2 : S$, $k = 1, 2 \ldots$ zu:

$$U_0''(x) = 0, \quad U_k'' = \mu\, U_{k-1}; \quad U_0(0) = U_k(0) = U_k'(0) = 0, \quad U_0'(0) = 1 \qquad (8).$$

Daraus folgt, wie man durch zweimaliges Differenzieren erweist:

$$U_0(x) = x, \quad U_k(x) = \int_0^x U_{k-1}(x)\,(x - x_1)\,\mu(x_2)\,d\,x_1 \quad \ldots \quad (8')$$

oder auch, durch wiederholte Anwendung der zweiten Formel:

$$U_k(x) = \int_0^{x_1} \ldots \int_{x_{k-1}}^{x} x_1\,(x_2 - x_1) \ldots (x - x_k)\,\mu(x_1) \ldots \mu(x_k)\,d\,x_1 \ldots d\,x_k \qquad (8'').$$

Die Bedingung dafür, daß die bei $x = 0$ verschwindende Lösung auch bei $x = l$ verschwindet, $U(l) = 0$, führt somit auf genau denselben Ansatz (5) zurück, da $U_k(l)$ offenbar mit C_k identisch ist.

Durch die vorstehenden Betrachtungen wird auf jeden Fall — man mag sich der einen oder der anderen der oben gekennzeichneten physikalischen Auffassungen anschließen — die mathematische Rechtfertigung für das von Lord Rayleigh eingeschlagene Verfahren erbracht: Näherungswerte für die Frequenzen (und die Schwingungsformen) dadurch zu finden, daß man die stetig verteilte Masse in eine endliche Anzahl konzentrierter Punktmassen zerlegt. Man wird sich natürlich, soweit keine besonderen Singularitäten vorliegen, dieses Verfahrens in viel weiterem Umfang bedienen dürfen als dem durch unsere Ableitung unmittelbar gedeckten, beispielsweise bei Stabschwingungen, die auf Gleichungen vierter Ordnung führen (§ 1, **3**), bei anderen Randbedingungen usf.

3. Summen und Integrale. Das genaue Gegenstück zu dem Verhältnis zwischen Differenzen- und Differentialgleichung trifft man im Bereiche der Integralgleichungstheorie an, wenn man ein bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe auffaßt. Wir haben in I **3** angedeutet, wie man unmittelbar von physikalischen Anschauungen aus zu einem Ansatz gelangt, der — bei kontinuierlichen Variablen — die Gestalt einer Integralgleichung besitzt. Wir können uns jetzt von unserer Differenzgleichung (1) aus zu einer »Summengleichung« führen lassen, die dann in eine Integralgleichung übergeht. Schreiben wir nämlich (1) in der Form

$$-y_{\iota-1} + 2\,y_\iota - y_{\iota+1} = q_\iota \quad (\iota = 1, 2, 3 \ldots) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

und bezeichnen mit $Y_{\iota\varkappa}$ die dem Element der ι-ten Zeile und $\varkappa$-ten Spalte in der Koeffizientenmatrix zugeordnete Unterdeterminante, so lautet die Lösung von (9) nach II, § 1, (8):

$$y_\iota = \frac{\Sigma\, Y_{\varkappa\iota}\,\varphi_\varkappa}{n+1} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (10),$$

da die Gesamtdeterminante von (9), d. i. D_{n+1} für $\lambda = 0$, nach dem oben Gesagten den Wert $n+1$ besitzt. Die Unterdeterminante $Y_{\varkappa\iota}$ sieht, wenn zunächst $\varkappa < \iota$ vorausgesetzt wird, so aus: In der linken Ecke oben stehen $\varkappa - 1$ unveränderte Zeilen und Spalten, die eine Determinante der Form (2) mit $\lambda = 0$ bilden; in der rechten Ecke unten steht eine ebenso gebaute Determinante von $n - \iota$ Zeilen und Spalten; die dazwischen liegenden $(\iota - \varkappa)$ Zeilen haben in der Hauptdiagonale immer das Element -1 und links davon lauter Nullen. Demnach ist der absolute Wert von $Y_{\varkappa\iota}$ das Produkt der beiden Eckdeterminanten, d. i. $\varkappa(n+1-\iota)$, und das Vorzeichen ist, wenn man die Festsetzung in II, § 1, (6) beachtet, positiv. Bei $\varkappa > \iota$ vertauschen nur die beiden Indizes ihre Rollen. Setzen wir also

$$\left.\begin{aligned} K_{\varkappa\iota} = m_\varkappa \frac{Y_{\varkappa\iota}}{n+1} &= m_\varkappa \cdot \frac{\varkappa(n+1-\iota)}{n+1} \text{ für } \varkappa \leqq \iota, \\ &= m_\varkappa \cdot \frac{\iota(n+1-\varkappa)}{n+1} \text{ für } \varkappa \geqq \iota \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \ldots (11),$$

so lautet (10) wenn noch für $\varphi_\varkappa$ der Wert aus (1) eingeführt wird:

$$y_\iota = \lambda \sum_{\varkappa=1}^{n} K_{\iota\varkappa}\, y_\varkappa \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

In dieser Gestalt gleicht der Ansatz schon vollständig den in § 1 besprochenen, die zu der Integralgleichung zweiter Art führten. In der Tat brauchen wir nur, um zum Fall stetiger Massenverteilung überzugehen, die Quotienten $\varkappa : (n+1)$ durch $\xi : l$, dann $\iota : (n+1)$ durch $x : l$, endlich $m_\varkappa : (n+1)$ durch $\mu(\xi)$ zu ersetzen und analog (11) eine Funktion zweier Variabler als »Kern« $K(\varkappa, \xi)$ zu definieren:

$$\left.\begin{aligned} K(x, \xi) &= \mu(\xi)\,\frac{\xi(l-x)}{l} \text{ für } \xi \leqq x, \\ &= \mu(\xi)\,\frac{x(l-\xi)}{l} \text{ für } \xi \geqq x \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \ldots \ldots (13).$$

Dann wird aus (12), mit der wie oben veränderten Bedeutung von λ, die Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (14).$$

Daß diese mit dem Differentialgleichungsansatz (6) identisch ist, erkennt man am besten durch zweimaliges Differenzieren von (14) unter Beachtung von (13), (wobei man das Integrationsgebiet $0, l$ in die beiden Teile $0, x$ und x, l spalten muß). Da nun einerseits (12) mit (1), andererseits (14) mit (6) übereinstimmt, folgt aus den Ueberlegungen in **2**, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung durch Grenzübergang aus den Lösungen des Gleichungssystems (12) gewonnen werden können. Dieses (12) unterscheidet sich aber von (14) nur dadurch, daß das bestimmte Integral durch eine Summe ersetzt ist. Im folgenden Kapitel werden wir ein Auflösungsverfahren für Integralgleichungen zweiter Art kennen lernen, das sich ganz auf die formale Analogie zwischen den beiden Ansätzen (12) und (14) stützt.

Handelt es sich um tatsächliche numerische Berechnung von Eigenwerten usf., so kann kein Zweifel darüber bestehen, daß bei dem vorliegenden Problem der Ansatz der Differenzen- bzw. Differentialgleichung der weitaus einfachere ist. Es hat sicherlich keinen Zweck, die einfache Matrix des Gleichungssystems (1) durch die wesentlich kompliziertere von (12) zu ersetzen, oder an Stelle der Grundlösung U und der darauf gegründeten Reihenentwicklung (5) die weit umständlichere treten zu lassen, die man aus den »iterierten Kernen« (XII, § 3, **3**) bildet. Aber das Verfahren der Integralgleichungen ist dadurch entscheidend überlegen, daß man damit auch andere Probleme beherrscht, namentlich solche, die aus partiellen Differentialgleichungen entspringen, und bei denen der Differenzenansatz nicht mehr zu so bequemen Schlußfolgerungen führt (vgl. z. B. XIII, 2, **6**).

4. Die orthogonalen »Komponenten« einer Funktion. Spricht man heute in der Analysis von »unendlich vielen Variablen«, so meint man in der Regel etwas anderes als den Uebergang von Differenzen- und Summengleichungen zu Differential- und Integralgleichungen. Wir haben schon an verschiedenen Stellen dieses Buches, besonders ausführlich in VIII, § 1, von der Entwicklung sogenannter willkürlicher Funktionen nach einem Orthogonalsystem gegebener Funktionen gesprochen. Der einfachste und geläufigste Fall ist der der Fourier-Entwicklung. Bezeichnen wir mit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \ldots$ eine Reihe von normierten orthogonalen Funktionen für ein Intervall a, b (VIII, § 1, **1**), als deren Repräsentant etwa die Sinus der Vielfachen von x (mit $a = 0$, $b = 1$)

$$\sqrt{2} \sin \pi x, \quad \sqrt{2} \sin 2 \pi x, \quad \sqrt{2} \sin 3 \pi x \ldots$$

gelten mögen[1]), so kann man eine »willkürliche« Funktion $f(x)$ unter sehr allgemeinen Voraussetzungen in eine Reihe der Form

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + c_3 \varphi_3(x) + \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten c durch

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \, d x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15')$$

gegeben sind. Es ist in VIII, § 1, **4** näher ausgeführt worden, wie man jede Funktion f als einen »Vektor«, die $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ als zueinander senkrechte Einheitsvektoren und demgemäß die $c_1, c_2 \ldots$ als die »Komponenten« von f in den Richtungen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ innerhalb eines Raumes von unendlich viel Dimensionen auffassen kann. Man muß nur daran denken, daß ein n-dimensionaler Vektor für $n > 3$ doch auch nur eine gewisse Zusammenfassung von n Zahlen ist, die man der geometrischen Veranschaulichung wegen in Analogie zum Falle $n = 3$ vornimmt. Der konkrete Inhalt der Analogie ist im wesentlichen nur der, daß wenn man $\int f g \, d x$ als skalares Produkt von f und g definiert (auf das vektorielle Produkt ist der Gedankengang nicht anwendbar), sich dieses Produkt durch die Fourier-Koeffizienten $c_1, c_2 \ldots$ von f und $k_1, k_2 \ldots$ von g in der Form $c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + \ldots$ darstellt.

Das Operieren mit den abzählbar unendlich vielen Komponenten $c_1, c_2 \ldots$ als den Bestimmungsstücken einer stetigen Funktion nennt man die »Analysis der unendlich vielen Variablen.« Grundlegend ist hier der in I, § 5, **3** und VIII, § 1, **5** erwähnte Satz von Fischer und Riesz, der besagt, daß jeder Zahlenfolge $c_1, c_2 \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme eine, im wesentlichen eindeutig bestimmte, Funktion entspricht. Eine Vorstellung von der Art der Anwendung dieser Begriffsbildungen kann das in II **4** behandelte Beispiel der Integralgleichung mit trigonometrischem Kern vermitteln. Wir hatten dort, Gl. (18') eine Entwicklung für den Kern $K(x, \xi)$ gefunden, die wir in etwas allgemeinerer Form so schreiben können:

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(x)}{\lambda_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

wenn mit λ_n die Eigenwerte $n^2 \pi^2$ und mit φ_n die Eigenfunktionen, nämlich die mit $\sqrt{2}$ multiplizierten $\sin n \pi x$, bzw. $\sin n \pi \xi$ bezeichnet werden. Wir werden später (XII, § 3, **3**) sehen, daß eine solche Entwicklnng des Kernes in viel allgemeineren Fällen möglich ist. Charakteristisch für die Analysis der unendlich vielen Variablen ist es nun, (16) als Analogie zu der Darstellung einer quadratischen Form in n Veränderlichen, wie sie in II, § 2, (18'') gegeben war, aufzufassen. Die Eigenfunktionen φ_n als Einheitsvektoren spielen jetzt die Rolle der Hauptachsen der durch K bestimmten quadratischen Form. Nimmt man jetzt eine beliebige Funktion $f(x)$ durch ihre »Komponenten« c_n gegeben an, so erscheint die Lösung der Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, \xi) \, y(\xi) \, d \xi = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

[1]) Der Faktor $\sqrt{2}$ ist nur erforderlich, um die Normierungsbedingung $2 \int_0^1 \sin^2 n \pi x = 1$ zu erfüllen.

in vollständiger Analogie zu den Ausführungen in II, § 2, **4**. Sind nämlich $k_1, k_2 \ldots$ die gesuchten Komponenten von $y(x)$, so erhält man durch Einsetzen von (16) in (17) für jeden Index n:

$$k_n - \lambda \frac{k_n}{\lambda_n} = c_n, \quad \text{also} \quad k_n = c_n \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und demgemäß die Lösung von (17):

$$y(x) = f(x) + \lambda \left[\frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda} \varphi_1(x) + \frac{c_2}{\lambda_2 - \lambda} \varphi_2(x) + \ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18')$$

in einer Form, die vollkommen übereinstimmt mit der in II, § 2 (23) gegebenen Lösung des algebraischen Problems.

Im übrigen steht die hier betrachtete Analysis von unendlich vielen Veränderlichen in engem Zusammenhang mit den Methoden der Variationsrechnung, die im XX. Kapitel behandelt werden.

Lehrbücher der Integralgleichungstheorie.

Max Bôcher, An introduction to the study of integral equations. Cambridge University Press 1909. (Ganz kurze Einführung)

A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. 2. Aufl. Braunschweig (Vieweg) 1922.

D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin (Teubner) 1912.

Tr. Lalesco, Introduction à la theorié des équations intégrales. Paris (Hermann & fils) 1912.

H. B. Heywood und M. Fréchet, L'équation de Fredholm et ses apglications à la physique mathématique. Paris (Hermann & fils) 1912. 490

KLEINE MITTEILUNGEN

Anwendungen des logarithmischen Zirkels. In Bd. 4, S. 266, dieser Zeitschrift hat Prof. E. A. Brauer über eine Neukonstruktion des logarithmischen Zirkels berichtet. Die Verwendungsmöglichkeit dieses Zirkels ist, wie die der logarithmischen Methoden überhaupt, eine sehr mannigfaltige. Eine Reihe von Anwendungen bei der Auflösung von Gleichungen enthält R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, 1917; eine Anwendung auf die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen bringt die 2. Auflage dieses Leitfadens. Weiter habe ich — nachdem Prof. Mehmke auf die Brauchbarkeit des Zirkels bei der näherungsweisen Berechnung von Integralen der Form $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ hingewiesen — den Zirkel bei der angenäherten Berechnung folgender Integrale mit Vorteil benützt:

$$1). \int_a^b x^n f(x)\, dx \qquad 2.) \int_a^b e^{\beta x} f(x)\, dx .$$

Integrale der ersten Art treten bei der Approximation empirischer Funktionen durch ganze rationale Funktionen, Integrale der zweiten Art bei der Analyse von Abklingungskurven auf.

Beispiel zu 1., entnommen aus v. Sanden, Praktische Analysis, 1. Aufl., 1914, S. 109. Gegeben sind die zusammengehörigen Werte

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	16	66	142	257	401	575	801	1050	1319

oder bei zweckmäßiger Verlegung des Anfangspunktes

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	66	142	257	401	575	801	1050	1319

Es handelt sich um Auswertung von Integralen der Form

$$J_n = {}^1/_2 \int_{-1}^{+1} u^n \bar{f}(u)\, du ,$$

wo n eine ganze nicht-negative Zahl ist. Durch die Substitution $u = \frac{x}{4}$ ergibt sich mit $\bar{f}(u) = f(x)$

$$J_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \int_{-4}^{+4} x^n f(x)\, dx$$

und hierfür mittels Auswertung nach der Simpsonschen Regel

$$J_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{3} \{(-4)^n f(-4) + (-3)^n 4 f(-3) + (-2)^n 2 f(-2) + (-1)^n 4 f(-1) + 1^n 4 f(1) + 2^n 2 f(2) + 3^n 4 f(3) + 4^n f(4)\} \text{ für } n \neq 0,$$

während für $n = 0$ die Klammer noch den Summanden $2 f(0)$ enthält.

Der Klammerausdruck ist nun bequem logarithmisch zu bestimmen. Die Verwendung von logarithmischem Papier von 5 cm Einheit oder eines logarithmischen Maßstabes mit dieser Einheit sei vorausgesetzt.

Für die Bestimmung des Wertes J_0 trägt man auf der logarithmischen Skala die Werte

$f(-4)$; $4f(-3)$; ... $2f(0)$; ... $f(4)$ ein; in der Zeichnung (Abb. 1 a)[1]) sind die diesen Werten entsprechenden Stellen auf der mit J_0 versehenen Skala mit den Ziffern -4; -3; ... 0; ... 4 bezeichnet. Dann addiert man mit dem logarithmischen Zirkel alle Summanden und kommt auf den durch einen kleinen Kreis bezeichneten Punkt. Der auf der logarithmischen Skala zugehörige Zahlenwert ist noch durch 24 zu dividieren, um J_0 zu erhalten. Für die Bestimmung des Wertes J_1 hat man zu den Logarithmen der $f(-4)$; $4f(-3)$; ... $f(4)$

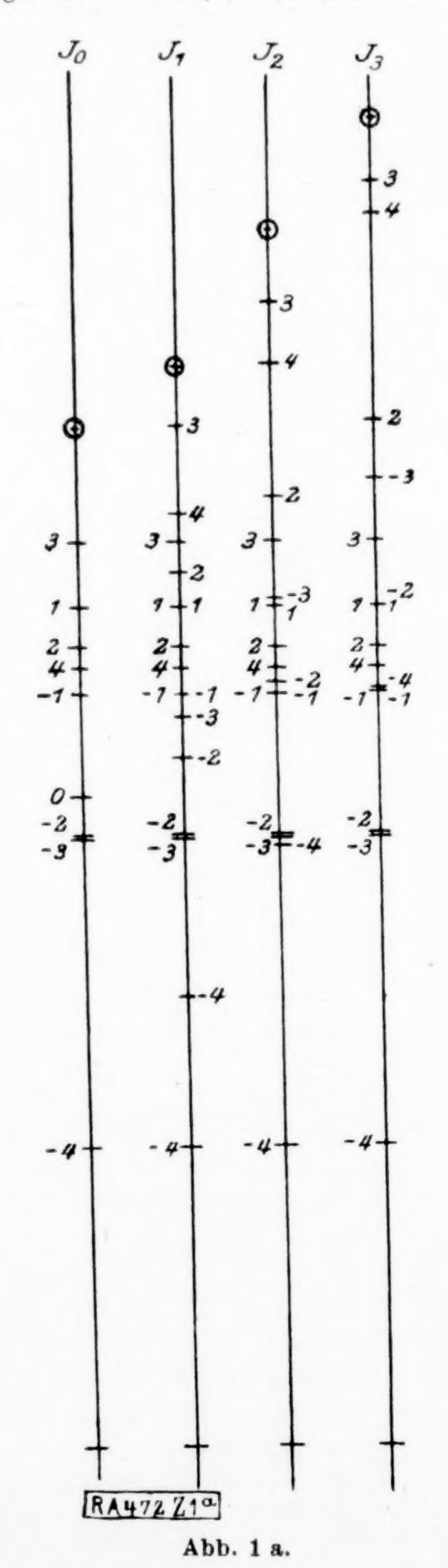


Abb. 1 a.

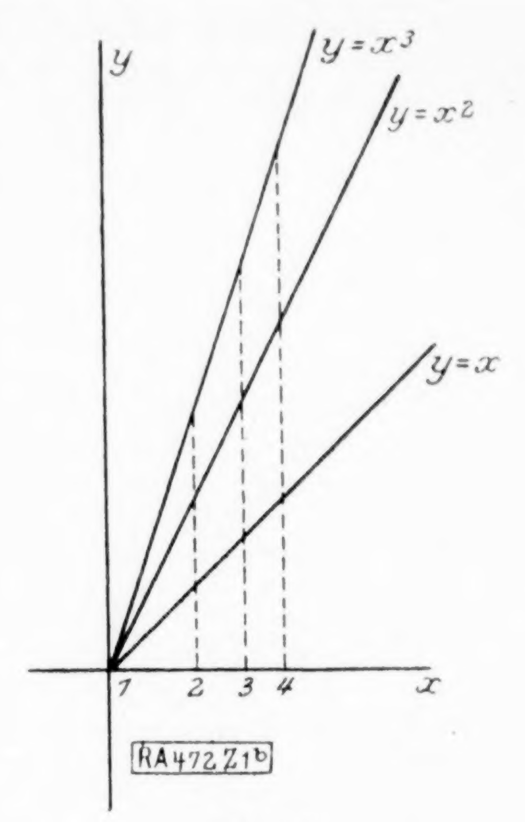


Abb. 1 b.

jeweils die Logarithmen der x zu addieren. Man entnimmt sie einer Nebenfigur, die Bilder der Funktionen $y=x$; $y=x^2$; $y=x^3$ enthält, in einem Koordinatensystem, dessen beide Achsen logarithmische Teilung (Einheit 5 cm) haben (Abb. 1b). Die Stellen, welche den Werten $f(-4)$; $4f(-3)$; .... $f(4)$ auf der mit J_1 bezeichneten logarithmischen Skala entsprechen, sind durch die links beigeschriebenen Zahlen -4; -3; .... 3; 4 bezeichnet, die Stellen, welchen die Werte $4f(-4)$; $3 \cdot 4f(-3)$; $2 \cdot 2f(-2)$; .... $4f(4)$ zugehören, mit -4; -3; -2; .... 4 rechts von der Skala. Nun braucht man nur die rechts bezeichneten Werte der Skala, soweit sie in J_n positiv sind, zu addieren und die negativen davon zu subtrahieren. Der durch einen kleinen Kreis markierte Endpunkt ist der Wert $96 J_1$.

Analog verfährt man bei J_2 und J_3, nur hat man bei J_2 die Werte von x^2, bei J_3 die von x^3 der Nebenfigur zu entnehmen. Bei J_2 sind alle rechts der Skala bezeichneten Werte zu addieren, der durch den kleinen Kreis markierte Punkt gibt $384 J_2$; bei J_3 sind wieder die mit -1; -2; -3; -4 rechts bezeichneten Werte von der Summe der positiv bezeichneten Werte zu subtrahieren; der durch den kleinen Kreis markierte Punkt gibt $1536 J_3$. Es ergaben sich die Werte

$J_0 = 494{,}2$ (berechnet 492,3)
$J_1 = 215{,}6$ (» 218,0)
$J_2 = 188{,}6$ (» 188,6)
$J_3 = 132{,}3$ (» 131,2).

Beispiel zu 2., entnommen aus F. A. Willers, Numerische Integration, 1923, S. 83. Es soll berechnet werden

$$J\beta = \int_{-1}^{+1} f(x)\, e^{\beta x}\, d\,x; \qquad \beta = 0 \text{ und } \beta = 1{,}002.$$

[1]) Die Abbildungen 1 a, 1 b, 2 a, 2 b sind in halber Größe gezeichnet.

Gegeben die Wertetabelle

x	-1	$-{}^2/_3$	$-{}^1/_3$	0	${}^1/_3$	${}^2/_3$	1
$f(x)$	64	66	69,5	74	80,8	91	103,5

Mittels der Simpsonschen Regel ergibt sich näherungsweise

$$J_\beta = {}^1/_9 \{ e^{-\beta} f(-1) + e^{-{}^2/_3\beta}\, 4 f(-{}^2/_3) + e^{-{}^1/_3\beta}\, 2 f(-{}^1/_3) + 4 f(0) + e^{{}^1/_3\beta}\, 2 f({}^1/_3) + e^{{}^2/_3\beta}\, 4 f({}^2/_3) + e^{\beta} f(1) \}.$$

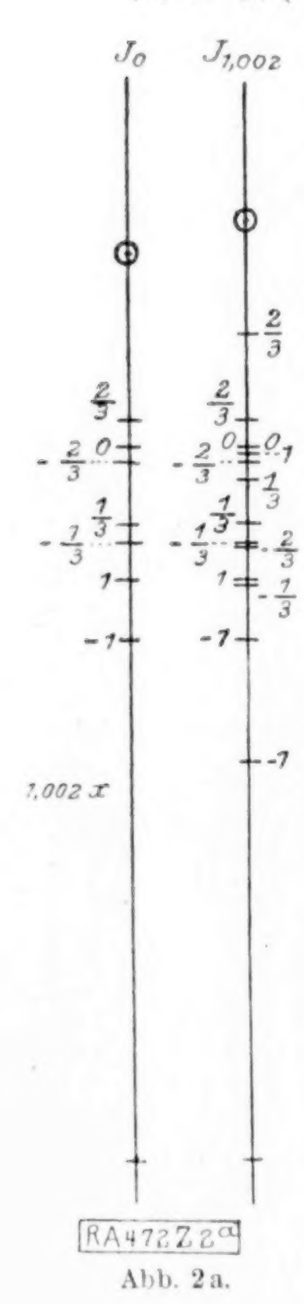


Abb. 2a.

Für $\beta = 0$ markiert man (Abb. 2a) die Werte $f(-1)$; $4f(-{}^2/_3)$; ..... $f(1)$ auf einer logarithmischen Skala J_0 (Einheit 5 cm) und addiert mit dem logarithmischen Zirkel. Der mit einem kleinen Kreis markierte Punkt gibt $9\,J_0$.

Für $\beta = 1{,}002$ hat man die Produkte $e^{-\beta} f(-1)$, usw. auf einer logarithmischen Skala aufzutragen, also die Summen der Strecken für die Logarithmen von $f(-1)$ und $e^{-\beta}$, usw. Man erhält die Werte der Funktion $e^{\beta x}$ bequem durch halb-logarithmographische Darstellung dieser Funktion in einem Koordinatensystem, dessen x-Achse gewöhnliche Teilung, dessen y-Achse logarithmische Teilung (Einheit 5 cm) hat (Abb. 2b). Das Bild von $e^{\beta x}$ wird eine Gerade. Man markiert auf der logarithmischen Skala $J_{1,002}$ die Werte $f(-1)$; $4f(-{}^2/_3)$; ..., durch die links beigeschriebenen Zahlen -1; $-{}^2/_3$; .... und die Werte $e^{-1,002} f(-1)$; $e^{-{}^2/_3\, 1,002}\, 4f(-{}^2/_3)$; ..... durch die rechts beigeschriebenen Zahlen -1; $-{}^2/_3$; .... Addition der rechts markierten Werte mit dem logarithmischen Zirkel führt zu dem durch einen kleinen Kreis markierten Punkt, dem $9\,J_{1,002}$ entspricht. Es ergaben sich die Werte

$$J_0 = 156{,}2 \text{ (berechnet } 154{,}7)$$
$$J_{1,002} = 199{,}0 \text{ (» } 196{,}8).$$

Stuttgart. F. Pfeiffer. 472

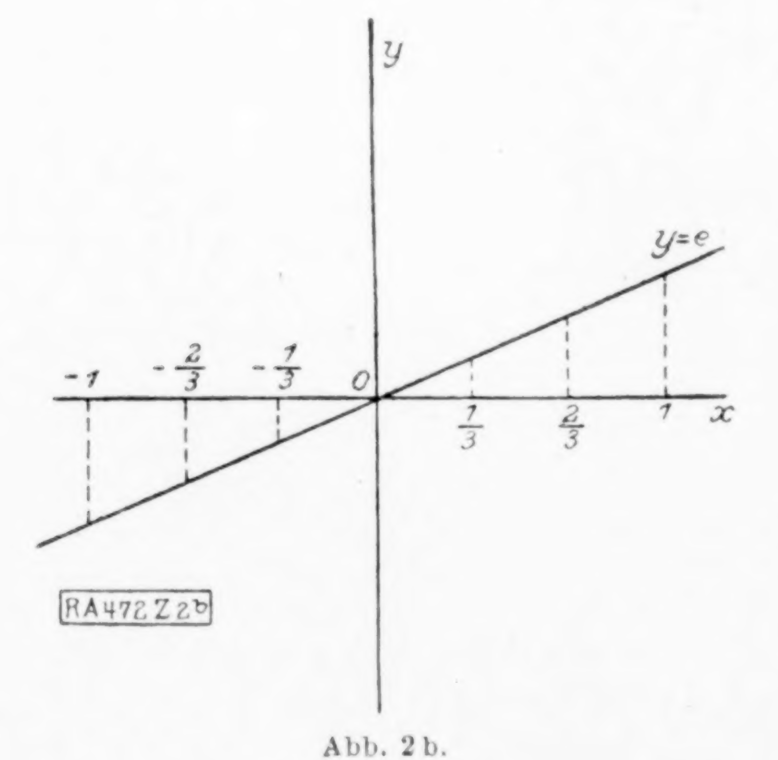


Abb. 2b.

Eine Anwendung der Parallelkurve der logarithmischen Spirale. Bei den Tafelscheren ergibt sich die Aufgabe, das Messer nach einer Kurve k so zu schleifen, daß es bei Drehung um O die Tischkante p unter einem konstanten Schneidwinkel σ schneidet (Abb. 1). Ueber die

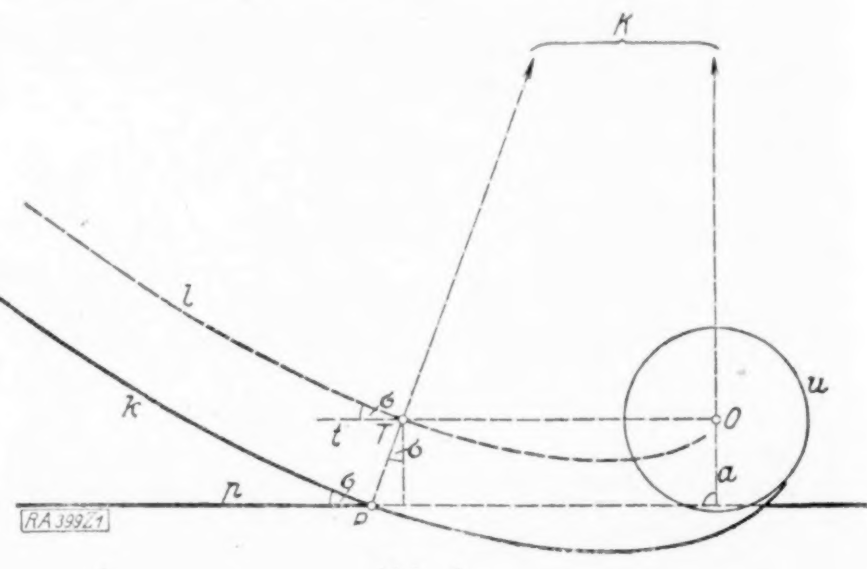


Abb. 1.

Natur von k erhält man durch die Parallelkurve l im Abstande $\overline{PT} = \dfrac{a}{\cos\sigma}$ Aufschluß (a = Abstand O von p). Bei einer beliebigen Lage des Messers hat der dem Schneidpunkt P entsprechende Punkt T der Parallelkurve l den Abstand $\overline{PT}\,.\cos\sigma = a$ von p, liegt also auf $t \parallel p$ durch O. Nun denken wir uns das Messer k festgehalten und den Tisch p um O gedreht. p bildet dabei die Tangentenschar des Kreises (O, a) (nicht gezeichnet) und t das Büschel $O(t)$. k soll die Tangentenschar (p) unter dem konstanten Winkel σ schneiden[1]), daher l ebenso das Büschel (t). t muß also eine logarithmische Spirale, k daher eine ihrer Parallelkurven sein. Sie nähert sich asymptotisch von außen dem Kreise $u\left(O, \dfrac{a}{\cos\sigma}\right)$.

Die Evolute der logarithmischen Spirale ist eine (kongruente) logarithmische Spirale. Eine Kurve und ihre Parallelkurven haben dieselbe Evolute. k ist also auch Evolente einer logarithmischen Spirale[2]). Der Krüm-

[1]) G. Loria, Spezielle ebene Kurven, 2 Aufl., Leipzig 1911, 2. Bd. S 270, gibt die Gleichung einer solchen Kurve in Parameterform unter der Bezeichnung inverse Evolutoide eines Kreises.

[2]) H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, (Sammlung Schubert LVI), Leipzig 1908, S. 225, bringt die zwei Formen und natürliche Gleichung dieser Kurve ohne Angabe der besonderen Eigenschaften. Man könnte k auch als schiefe Konchoide der logaritmischen Spirale l auffassen.

mungsmittelpunkt K eines Punktes P ergibt sich somit im Schnitt der Normalen PT mit einer Geraden $\perp p$ durch O. Bei der praktischen Ausführung wird man sich meist auf einen Krümmungskreis in der Mitte der Schere beschränken können.

Will man jedoch die Kurve k genau zeichnen, so bestimme man zunächst weitere Punkte von l. Das geschieht am besten, indem man zuerst auf Logarithmenpapier die Funktion $r = e^{\varphi \cdot \operatorname{cotg} \sigma}$ zeichnet. Trägt man r mit Hilfe der 25 cm langen Logarithmenteilung auf und entspricht 1° von φ 1 cm, so erhält man

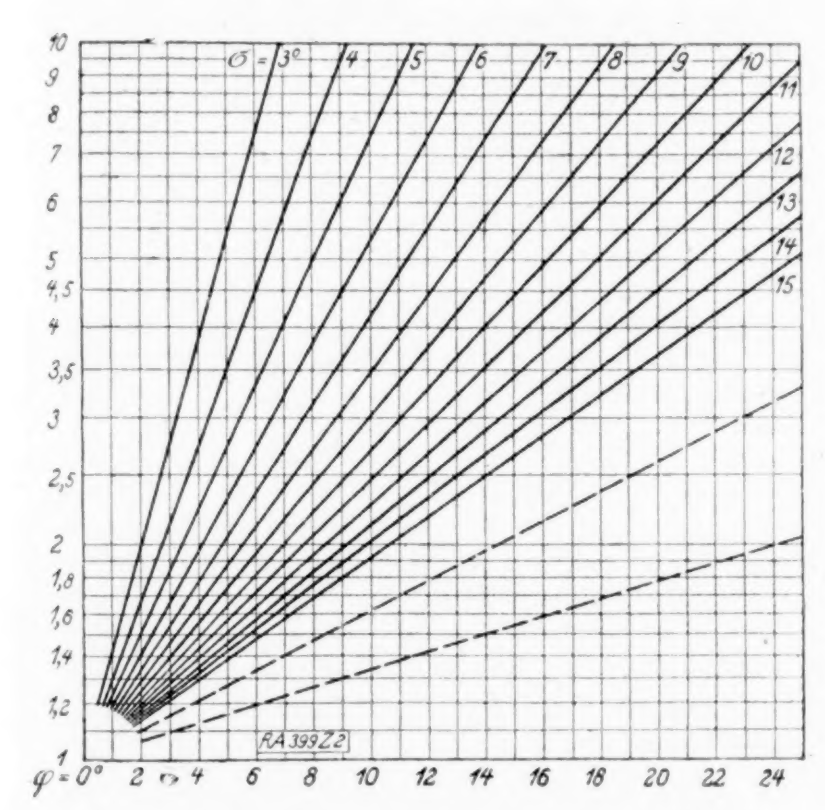


Abb. 2. Diagramm zum Entwerfen logarithmischer Spiralen. (Im Original auf Logarithmenpapier Schleicher & Schüll Nr. 367 1/2.)

Gerade (Abb. 2) mit folgenden Richtungskoeffizienten:

σ	Richtungskoeffizient	σ	Richtungskoeffizient
3°	3,616	10°	1,075
4°	2,710	11°	0,975
5°	2,166	12°	0,892
6°	1,803	13°	0,821
7°	1,543	14°	0,760
8°	1,348	15°	0,707
9°	1,196		

Die in Abb. 2 gestrichelten Geraden entsprechen den zwei kleinsten σ-Werten unter den unendlich vielen, für die die logarithmische Spirale mit ihrer Evolute zusammenfällt[1]):

σ	Richtungskoeffizient
74° 39′ 19″	0,520
80° 40′ 17″	0,311

Dabei entspricht 10° von φ 1 cm Abszissenachse.

Für $a = 0$ (aus konstruktiven Gründen meist nicht der Fall) ist k natürlich eine logarithmische Spirale und identisch mit l.

Konstruktive Gründe sprechen auch gegen die Anwendung der Parallelkurve auf der konkaven Seite der logarithmischen Spirale. Diese hat neben andern Singularitäten unendlich viele reelle Doppeltangenten. Nebenbei sei erwähnt, daß auf allen Doppeltangenten der Abstand der beiden Berührungspunkte der gleiche ist. Für $\sigma = \pi/_2$ versagt obige Ueberlegung. Es ist aber nicht schwer einzusehen und übrigens sehr bekannt, daß diesem Falle die Kreisevolvente entspricht. Sie ist von unserer Anwendung von vornherein nicht ausgeschlossen, jedoch stimmen die Grenzen der praktisch verwendeten σ-Werte ungefähr mit denen der ersten Tabelle überein.

Wien. Anton E. Mayer. 399

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

Dr.-Ing. FRIEDRICH **BLEICH.** Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. XI + 581 S. Mit 486 Textabbildungen. Preis 37,50 M.

Das vorliegende Buch von Bleich ist eine bemerkenswerte Erscheinung der Brückenbauliteratur. Dem praktischen Berechnungsverfahren stellt der Verfasser die Theorie der eisernen Brücken gegenüber, nämlich die theotischen Grundlagen der gebräuchlichen Methoden, die durch Versuche im Laboratorium und Prüfungen an bestehenden Brücken erhärtet werden müssen. Das Buch setzt die Kenntnis der konstruktiven Ausbildung von eisernen Brücken und auch einiges aus der Baustatik voraus; es stellt sich die Aufgabe, durch eine Zusammenfassung von neueren Ergebnissen ein vertieftes Studium der Berechnung zu ermöglichen und dem entwerfenden Ingenieur als Hilfsmittel zu dienen.

Im ersten Teil, der in vier Abschnitte gegliedert ist, bringt Bleich die für den Eisenbrückenbau wichtigsten Probleme der Elastizitätstheorie (der technischen Festigkeitslehre). Die angreifenden Kräfte, die dynamische Wirkung der bewegten Last und die Festigkeitseigenschaften der Baustoffe werden zunächst erörtert. Besonders ausführlich wird dann die Knickfestigkeit behandelt. Gerade Stäbe von gleichem und veränderlichem Querschnitt sowie gegliederte Stäbe werden nach den üblichen Ansätzen berechnet, die Knickfestigkeit von ebenen Stabnetzen wird sehr eingehend nach dem Verfahren von Bleich (im Eisenbau 1919) untersucht. Es folgen Darlegungen über die Knicksicherheit der Druckgurte offener Brücken, die Stabilität von Bo-

[1]) Die von E. Czuber, Vorlesungen über Diff.- u. Integral-Rechnung, 4. Aufl., Leipzig 1918, 1. Bd. S. 398, dafür angegebene Bedingung ist unrichtig.

genträgern und das Ausbeulen plattenförmiger Körper. Schließlich werden die wesentlichsten Sätze über Zug- und Druckbeanspruchung, Biegung und Verdrehen mitgeteilt und örtliche Anstrengungen in Bauteilen (Nieten, Bolzen) betrachtet. — In der zweiten Hälfte des Werkes, die ebenfalls vier Abschnitte umfaßt, sind die Berechnung der Fahrbahntafel, der vollwandigen, fachwerkartigen und rahmenartigen Hauptträger, der Wind- und Querverbände, der Lager und Gelenke gezeigt.

Das inhaltsreiche Buch von Bleich ist klar geschrieben und es ist zu wünschen, daß es von den praktischen Brückeningenieuren nicht nur gelobt, sondern auch gelesen wird.

J. Ratzersdorfer. 481

Dr. techn. JOSEF **FRITSCHE**, Ingenieur, Assistent an der deutschen technischen Hochschule in Prag. Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzengleichungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. VI + 90 S.

Die statische Berechnung der steifen Rahmenträger bietet keinerlei grundsätzliche Schwierigkeit und läßt sich immer nach bekannten Methoden erledigen. Alle Arbeiten, die sich noch mit diesem Problem beschäftigen, verfolgen nur den Zweck, die Rechnung zu vereinfachen und sie dem praktischen Ingenieur bequemer zu gestalten. Von diesem Gesichtspunkt aus ist das vorliegende Buch zu betrachten. Es wird hier gezeigt, wie die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens unter gewissen Voraussetzungen mit Hilfe der Theorie der Differenzengleichungen einfach durchführbar wird.

Ein Stockwerkrahmen von n-Geschossen ist $3n$ fach statisch unbestimmt. Als Ueberzählige werden in üblicher Weise in jedem Geschoß die Biegungsmomente in den beiden Ständerfüßen und der Horizontalschub gewählt; das Hauptsystem besteht also aus n übereinandergestellten, rahmenartigen frei aufliegenden Trägern. Es gelingt nun für die Summen und die Differenzen der Ständerfußmomente rekurrente Gleichungen herzuleiten, nämlich Gleichungen von der Clapeyronschen Form

$$\sum_{u=0}^{2} a_{\nu, u} X_{\nu+u} = B_{\nu+1}$$

mit $\nu = 0$ bis $n-1$ und $a_{0,0} = a_{n-1,2} = 0$. Dies ist eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit den veränderlichen Koeffizienten a; die Unbekannten sind X_1 bis X_n, das Störungsglied B enthält den Einfluß der Belastung. Die Koeffizienten sind hierbei Funktionen der Riegellänge l, der Geschoßhöhe h, der Steifigkeitszahlen λ des Riegels und γ des Ständers. (Steifigkeitszahl ist der Quotient aus Stablänge und Querschnittsträgheitsmoment).

Der Verf. macht nun — und das ist das Neue seiner Berechnungen — die Ansätze

$$\lambda_\nu = A_1 n^\nu, \quad \gamma_\nu = A_2 n^\nu, \quad l_\nu = l \cdot \sigma^\nu, \quad h^\nu = h \cdot \sigma^\nu$$

(A_1, A_2, n und σ sind Konstante) mit denen die veränderlichen Koeffizienten in konstante übergeführt werden. Man erhält allgemein Gleichungen von der Bauart

$$X_{\nu-1} + a X_\nu + b X_{\nu+1} = B_\nu ,$$

deren Lösung leicht zu finden ist.

Bei einem gegebenen Stockwerkrahmen hat das Verfahren den Charakter einer Näherung, da die von vornherein festgelegte Veränderlichkeit der Steifigkeitszahlen, der Riegellängen und Geschoßhöhen ja nicht vorliegt. Es handelt sich dann darum, durch kleine Aenderungen in den einzelnen Gliedern sich dieser die Rechnung vereinfachenden Forderung möglichst anzupassen.

Der Verf. untersucht den Stockwerkrahmen mit geneigten und lotrechten Ständern für die verschiedenen vorkommenden Belastungsfälle, sowie den Rahmen mit konstanten Werten von λ und γ.

Bei einer geringen Geschoßzahl wird wohl die Auflösung der Elastizitätsgleichungen, ohne jede einschränkende Annahme, besser zum Ziel führen; bei einer großen Geschoßzahl bietet diese Methode jedoch eine wesentliche Rechenersparnis.

J. Ratzersdorfer. 329

GEORG **UNOLD**, Chemnitz. Der Kreisträger. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 255. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1922. 79 S.

In der vorliegenden Abhandlung werden Aufgaben über kreisförmig gebogene Träger von verschiedenartiger Stützung bearbeitet, bei einer Belastung durch senkrecht zur Trägerebene wirkende Kräfte. Diese Probleme sind seit Grashof wiederholt in der Literatur behandelt und bautechnisch als sog. »Balkon- und Erkerträger« und als »Torsionsringe« von Bedeutung. Der Verfasser bringt nun in einer einheitlichen beachtenswerten Darstellung neben den bereits bekannten Ergebnissen auch eigene Berechnungen, insbesonders über Träger vom I-Walzeisenprofil.

Zunächst sind die Untersuchungen unter der Voraussetzung durchgeführt, daß der Verdrehungswinkel dem Drehmoment proportional ist. Diese Annahme, die ausdrückt, daß die Querschnitte bei der Formänderung eben bleiben, gilt exakt nur für den Kreis- und Kreisringquerschnitt, bei Querschnitten, die sich von der Kreisform nicht sehr unterscheiden, aber auch beim Rechteck, können angenähert die Abweichungen hiervon vernachlässigt werden. Auf diese Weise sind berechnet: der Kreisbogen unter gleichförmiger Belastung und bei Beanspruchung durch Einzellasten und Einzeldrehmomente für verschiedene Randbedingungen, sowie der geschlossene Ring mit mehrfacher Stützung. Der größte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem Kreisträger vom Doppel-T-Querschnitt. Die Voraussetzung von bei der Deformation eben bleibenden Querschnitten kann hier nicht einmal mehr als eine Näherung in Betracht kommen. Unter

Verwertung der Forschungen von Timoschenko und A. Föppl über die Drillung dünnwandiger I-Walzprofile berechnet Unold den Kreisbogen mit bestimmten Einspannbedingungen und den geschlossenen Ring auf gleichmäßig verteilten Stützen.

J. Ratzersdorfer. 329

C. **PFLEIDERER,** Die Kreiselpumpen. Braunschweig. Verlag von Julius Springer. Berlin 1924.

Das Buch füllt eine bedeutende Lücke in der bisher vorhandenen Literatur von Kreiselpumpen und Turbinen aus, in dem in mustergültiger Weise die für die Praxis wichtigen hydrodynamischen Methoden graphischer und numerischer Art zusammengestellt werden und andererseits die bei der Konstruktion erforderlichen wesentlichen Merkmale klar hervorgehoben werden. Das Buch, das in erster Linie für den praktischen Ingenieur geschrieben ist, behandelt die ganze hydrodynamische Seite des Turbinenproblems auf Grund der Stromfadentheorie, und es ist nicht zu leugnen, daß man beim Lesen den Eindruck gewinnt, hier einen zielbewußten Aufbau der alten Zeunerschen Theorie vor sich zu haben. Neu ist ein vom Verfasser angegebenes Verfahren, um die endliche Anzahl der Schaufeln zu berücksichtigen, das auf der Annahme beruht, daß der Druck, der auf die Schaufeln wirkt, einen konstanten Wert hat und nur an den beiden Enden bis Null abfällt. Inwieweit dieses Verfahren und die zu ihm führenden Voraussetzungen richtig sind, muß die Erfahrung zeigen. Soviel mir bekannt, ist leider noch kein Versuchsmaterial über diesen Punkt vorhanden. Daß Verfasser die neuen hydrodynamischen Ansätze der Turbinentheorie etwas wenig berührt, hat eine gewisse Berechtigung, da die ganzen Probleme noch zu sehr in Fluß sind und noch weitergehender Klärung bedürfen, ehe man sie einem praktischen Lehrbuch einverleiben kann.

Die Ausführungen über die Kennlinien der Kreiselpumpen sind sehr geschickt und verständlich dargestellt. Die Analyse der *Q-H*-Linie durch Trennung der Kanalreibungsverluste, der Stoßverluste und der Minderleistung durch die endliche Schaufelzahl kommt der Anschauung sehr nahe. Zusammen mit dem von Pfleiderer aufgestellten neuen Kongruenzsatz der Drosselkurve gewinnt man eine sehr gute Uebersicht über das Verhalten der Maschine im Betriebe und die entstehenden Verluste. Zu den Ausführungen auf S. 126 sei bemerkt, daß die geringen Abweichungen von der geraden Linie (gestrichelte Kurve) in der Ungenauigkeit des Verfahrens begründet sind. Man kann, wie einige demnächst erscheinenden Arbeiten zeigen werden, exakt beweisen, daß sämtliche *Q-H*-Linien von Turbinen und Kreiselpumpen bei reibungsfreien Flüssigkeiten linear verlaufen müssen.

Der Axialpumpe ist ein verhältnismäßig geringer Raum zugewiesen. Das dort entwickelte Verfahren ist auf der Bauersfeldschen Arbeit aufgebaut. Es soll hier nicht verschwiegen werden, daß die Annahme des verschwindenden Kanalwirbels nicht berechtigt ist. Relativ zur Schaufel hat die Strömung unbedingt einen konstanten Wirbel. Dieses ist der Haupteinwand, den man gegen die Bauersfeldsche Theorie erheben kann, wie auch schon an anderer Stelle ausgeführt wurde. (Siehe Thoma, Innsbrucker Vorträge.)

Dem Zweck des Buches entsprechend, findet die Besprechung der einzelnen Konstruktionselemente sowie der charakteristischen Typenkonstruktion die gebührende Beachtung.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der Ingenieur in dem Buche eine wertvolle Unterstützung bei Betrachtung aller wesentlichen Einzelheiten findet, die für die konstruktive Ausbildung maßgebend sind, während der der Praxis etwas abstehende Wissenschaftler durch dieses Werk eingehend über die Bedürfnisse der Praxis unterrichtet wird. Das Buch wird zweifellos die gebührende Verbreitung finden und kann an dieser Stelle nur warm empfohlen werden.

Aachen. B. Eck. 517

E. **MADELUNG,** Dr. ord. Professor der Theoretischen Physik an der Universität Franfurt a. M. Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Mit 20 Textfiguren. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band IV. Verlag von Julius Springer, Berlin 1922. XII + 247 S. Preis geb. 10 M.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, für den Physiker ein Hilfsbuch zu schaffen, das diesem bei der Durchführung rechnerischer Untersuchungen ähnliche Dienste leisten soll wie etwa das bekannte Buch von Kohlrausch beim Experimentieren. Es handelt sich demnach im wesentlichen um eine Zusammenstellung von Zahlenwerten, Formeln und Sätzen ohne Ableitungen oder Beweise. Die Auswahl ist natürlich nicht unbeeinflußt von persönlicher Vorliebe oder von anderen individuellen Eigenschaften des Verfassers, doch kann man sagen, daß sie im ganzen das trifft, was den durchschnittlichen mathematischen Physiker interessieren wird. Aus der Algebra wird das Notwendigste über lineare Gleichungen gebracht, aus der Funktionentheorie einiges Grundsätzliche und eine ausführliche, durch schöne Zeichnungen ergänzte Darstellung wichtiger spezieller Funktionen. Hieran schließt sich ein Abriß der Kugel- und Zylinderfunktionen sowie der Gammafunktion und elliptischen Integrale. Es folgen kürzere Abschnitte über Reihenentwicklungen und Differential- und Integralrechnung sowie ein längerer über Differentialgleichungen, dann ein knapp drei Seiten umfassender Bericht über Integralgleichungen. Auf fünf Seiten wird die Variationsrechnung behandelt. Wesentlich ausführlicher beschäftigt sich das Buch mit Koordinatentransformationen und mit der Vektorrechnung (unter Berücksichtigung von n Dimensionen). Ueber das rein Mathematische hinaus gehen die Abschnitte X bis XIV, die der Wahrschein-

lichkeitsrechnung, der Mechanik, der Elektrizitätslehre, der Relativitätstheorie und der Thermodynamik gewidmet sind.

Es ist selbstverständlich, daß ein so umfassender Stoff in einem Buch von 16 Bogen in keiner Richtung erschöpfend behandelt werden kann. Oben ist schon gesagt worden, daß die Auswahl des Gebotenen in gewissem Sinne eine zweckentsprechende ist, allein es ist nicht zu übersehen, daß ein sehr großer Teil des Stoffes sich für eine derartige Behandlung, wie sie der Verfasser im Auge hatte und durchgeführt hat, überhaupt nicht eignet. Man kann gewiß das Wichtigste über Kugelfunktionen dem Physiker in Gestalt einer Formel- und Lehrsatzsammlung zur Verwendung bereitstellen, aber was soll man mit einem drei Seiten langen Abriß der Integralgleichungstheorie anfangen? Die Sätze, die hier ganz kurz ausgesprochen werden, ohne daß ihre Voraussetzungen auch nur annähernd angegeben würden, kann man weder als richtig noch als verständlich bezeichnen. So wird z. B. von der homogenen Integralgleichung ohne jede Einschränkung für den Kern oder für das Integrationsgebiet behauptet »die Eigenwerte bilden eine diskrete, nirgends im Endlichen sich häufende Zahlenmenge«. Dabei hat gerade der Physiker sehr oft mit Fällen zu tun, in denen etwa alle Eigenwerte untereinander gleich sind usw. Dieses Zitat ist als Beispiel ganz willkürlich herausgegriffen und es ließen sich ihm zahllose weitere derselben Art an die Seite stellen. Noch größere Bedenken als gegen die rein mathematischen Teile des Buches müssen gegenüber den den Anwendungen gewidmeten geltend gemacht werden. Hier wird vom Verfasser der Versuch gemacht, auf den wenigen zur Verfügung stehenden Seiten geradezu einen sachlichen Aufbau der einzelnen Gebiete durchzuführen. Wohin das führt, soll nur durch zwei Beispiele angedeutet werden. Auf S. 174 werden die verschiedenen Formen der mechanischen Grundgleichungen erörtert, wobei gleichzeitig die Lagrangesche Funktion $T+U$ und die Hamiltonsche Funktion $T-U$ verwandt werden. Aber es findet sich kein Platz, um dem Leser zu sagen, daß T im zweiten Fall durch Einführung der Impulse an Stelle der Geschwindigkeiten zu transformieren ist. Und S. 217 beginnt die Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem folgenden eigentümlichen Satz: »Bringt man

$$ds = \sqrt{\Sigma g_{ik}\, dx_i \cdot dx_k}$$

durch geeignete Wahl des Koordinatensystems auf die Form

$$\sqrt{(dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 + c^2 (dx_4)^2},$$

so sind die g_{ik} Konstanten.«

Daß nach einem mathematischen Taschenbuch für Physiker ein gewisses Bedürfnis bestehen mag, kann man wohl annehmen. Der Verf. wäre nach seinen vielseitigen Interessen und nach der besonderen Eigenart seiner Befähigung wie wenige andere berufen, ein solches Hilfsbuch zu schreiben. Man erkennt dies deutlich an den Teilen des vorliegenden Buches, die eine Bearbeitung in diesem Sinne zulassen; am besten gelungen sind vielleicht die Kapitel über Vektoranalysis und über Koordinatentransformationen. Wenn sich Gelegenheit zur Herausgabe einer zweiten Auflage bieten sollte, kann man dem Verf. nur raten, alles das auszuscheiden, was unmöglich in solch komprimierter Gestalt auch nur einigermaßen befriedigend behandelt werden kann und dafür vielleicht die übrigen Teile etwas weiter auszugestalten. Mises. 509

Dr.-Ing. E. H. L. **DÜRR**, Direktor im Luftschiffbau Zeppelin G. m. b. H., Friedrichshafen. Fünfundzwanzig Jahre Zeppelin-Luftschiffbau. Mit 186 Textabbildungen und einer Tafel. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1924. 83 S.

Gelegentlich der Fertigstellung des 126. Zeppelin-Schiffes (das unter dem Namen LZ 3 bekannt ist) hat der verdiente technische Direktor der Friedrichshafener Werft, L. Dürr, in einer weiteren Kreisen verständlichen Darstellungsform das Interessanteste über die Entwicklung und den Bau der Zeppelin-Schiffe zusammengestellt. Auch wer nicht selbst Techniker ist, wird mit großem Interesse den Ausführungen folgen, die einen Einblick in das Werden und Wachsen eines der wertvollsten Werke deutscher Technik bieten. Der Verlag hat durch sorgfältige Ausstattung und namentlich durch die mustergültige Wiedergabe der Abbildungen das Möglichste geleistet.

Mises. 515

FELIX **AUERBACH**, Die Furcht vor der Mathematik und ihre Ueberwindung. Verlag von Gustav Fischer, Jena 1924. 68 S. Preis 1,50 M.

An dieser neuen Schrift Auerbachs überrascht vor allem der Titel; hier wird eine allgemein bekannte Tatsache zum erstenmale beim Namen genannt.

Als Ursache der Furcht vor der Mathematik bezeichnet Auerbach die unklare, zuweilen sogar falsche Vorstellung, die man in Nicht-Fachkreisen von dieser Wissenschaft besitzt. Das Buch versucht, in gemeinverständlicher Weise klarzulegen, worin Mathematik eigentlich besteht; denn die Schule, insbesondere die »ältere Schule«, lehrt dies nach Ansicht des Verfassers nicht. In welcher Art unterrichtet werden müßte, zeigt Auerbach an einigen gut gewählten Beispielen aus dem Alltag. Seine Meinung ist »es muß weniger gelehrt als erzogen, mehr angeregt als auferlegt werden«. Er charakterisiert Mathematik als Sprache, die es gestattet, Gedankengänge in präziser Fassung wiederzugeben, andererseits als Kunst, ebenbürtig der Dichtung, der Musik und der bildenden Kunst. Schließlich weist er auf die mannigfachen Anwendungsgebiete der Mathematik hin, in denen sie oft nicht nur Hilfsmittel, sondern geradezu Wegweiser ist.

Man könnte allerdings zweifeln, ob alle diese Ausführungen über das Wesen der Mathematik geeignet sind, die »Furcht« zu beseitigen. Tat-

sächlich hat man im allgemeinen vor Mathematik mehr Scheu als vor andern Wissenschaften, obwohl man von diesen gewöhnlich auch nicht mehr und nicht weniger weiß als von jener. Da ist es doch wahrscheinlich, daß diese Furcht tiefere psychologische Ursachen hat. Vielleicht ist es der Umstand, daß die Mathematik so fernab vom Gemütsleben liegt, oder die Tatsache, daß sie besonders hohe Anforderungen an Konzentrationskraft und Abstraktionsvermögen stellt. Auf diese Fragen näher einzugehen hätte aber den Umfang der kleinen Schrift weit überschritten.

Jedenfalls wird dieses geistvoll geschriebene Büchlein seinen Lesern mannigfache Anregung bieten.

Wien, im September 1924.

Elise Helly. 461

NACHRICHTEN

Dresdener Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Die im vorangehenden Heft angekündigte wissenschaftliche Tagung, die einer Besprechung von Fragen der Plastizitätstheorie gewidmet war, hat am 6. und 7. März in Dresden unter außerordentlich starker Beteiligung der Mitglieder stattgefunden. Es waren mehr als 70 Zuhörer an den beiden Vortragstagen zugegen. Besonders begrüßt wurde die Anwesenwesenheit von sechs Herren aus Holland und mehreren Mitgliedern aus der Tschecho-Slowakei. An die meisten Vorträge schloß sich eine ausführliche und überaus lebhafte Diskussion an, die schließlich auch über die Sitzungszeit hinaus auf die stark besuchten geselligen Zusammenkünfte ausgedehnt wurde.

Der über Erwarten zahlreiche Besuch der Versammlung, die fruchtbare wissenschaftliche Aussprache und nicht zuletzt die sorgfältige Vorbereitung durch die Dresdener Herren ließen den hier zum erstenmal unternommenen Versuch einer selbständigen Veranstaltung der Gesellschaft als einen vollen Erfolg erscheinen. Ueber den Inhalt der einzelnen Vorträge wird an anderer Stelle dieses Heftes eingehend berichtet. Im folgenden wird ein kurzes Protokoll der Versammlung gegeben.

Freitag, den 6. März

vormittags 10 Uhr: Besichtigung des Maschinenlaboratoriums der Technischen Hochschule unter Führung der Herren Mollier und W. Pauer. Teilnehmerzahl ca. 50.

vormittags 12 Uhr: Ausschußsitzung. Anwesend: Der Vorstand Prandtl, Reißner, von Mises; vom wissenschaftlichen Ausschuß Finsterwalder, v. Kármán, Körner, Mader, Trefftz, ferner Hr. Gehler. Entschuldigt: Hr. Knoblauch. Es wurde beschlossen, auf der bevorstehenden Hauptversammlung in Danzig, die gemeinsam mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für technische Physik abgehalten wird, in erster Linie hydraulische Fragen, vorzugsweise solche der Schiffstheorie zu behandeln. Doch sind Vorträge aus allen Arbeitsgebieten der Gesellschaft erwünscht. Die Anmeldung soll möglichst bald beim Geschäftsführer erfolgen.

nachmittags 3 Uhr 30 Min.: Erste wissenschaftliche Sitzung. Vorsitzender Hr. Prandtl. Nach Eröffnung der Sitzung durch den Vorsitzenden begrüßt Se. Magnifizenz der Rektor der Technischen Hochschule Dresden, Hr. Prof. A. Heiduschka, im Namen von Rektor und Senat die Versammlung. Es folgen die Vorträge:

1. M. Polányi-Berlin: Verformung fester Körper vom Standpunkt der Kristallstruktur. — Aussprache: Rinne, Popper, v. Kármán, Prandtl, Weißenberg.
2. G. Sachs-Berlin: Verfestigung und Entfestigung.
3. E. Schmid-Berlin: Ueber die Konkurrenz verschiedener Gleitsysteme.

   Aussprache zu 2. und 3.: Hencky, v. Mises, Polányi, Masing, Rinne.
4. W. Gehler-Dresden: Das räumliche Problem der Schneidenfestigkeit plastischer Stoffe und das Dehnungsgesetz im unelastischen Druckbereich. — Aussprache: Daeves, Rinne, Prandtl, Masing, Nádai.
5. O. Föppl-Braunschweig: Versuche zur Wertung von Baustoffen auf Grund ihrer Dämpfungsfähigkeit. — Aussprache: Dresden.
6. E. Seidl-Berlin: Probleme der Geologie, insbesondere der der Salzlagerstätten, die zugleich Probleme der angewandten Mathematik und Mechanik sind. — Aussprache: Prandtl, Rinne.

Sonnabend, den 7. März

vormittags 9 Uhr: Zweite wissenschaftliche Sitzung. Vorsitzender: Hr. Reißner.

7. L. Prandtl-Göttingen: Mitteilung zum Turbulenzproblem. — Aussprache: von Mises, Schiller.
8. Th. v. Kármán-Aachen: Beitrag zur Theorie des Walzvorgangs. — Aussprache: Lorenz, Nádai, Reißner, Seidl, Siebold, Sachs.
9. A. Nádai-Göttingen: Neue Beiträge zum ebenen Problem der Plastizität.
10. W. Lode-Göttingen: Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze.
11. H. Hencky-Delft: Ueber den Spannungszustand beim Strömen plastischen Materials.
12. R. v. Mises-Berlin: Bemerkungen zur Formulierung des mathematischen Problems der Plastizitätstheorie.

   Aussprache zu 9. bis 12.: Prandtl, Hencky, Gehler, Nádai, Polányi, Sachs. 520

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zur Neuordnung des höheren Schulwesens in Preußen. Zu dem in Heft 5 des vorigen Bandes[1]) veröffentlichten Bericht über die preußische Schulreform sind dem Herausgeber zahlreiche zustimmende Aeußerungen zugegangen. Allgemein macht sich das Bestreben, zu einer ruhigeren Beurteilung der Sachlage zu gelangen, geltend. Auf eine abweichende Auffassung, die zu einem bemerkenswerten konkreten Vorschlage führt, wird noch später zurückzukommen sein. Aus Oesterreich wird darauf aufmerksam gemacht, daß die Zahl der Mathematikstunden im Gymnasium noch etwas geringer ist als in dem Bericht angegeben: Sie beträgt zwei in Oberprima, drei in allen anderen Klassen. Auch wird besonders betont, daß der in Oesterreich sehr hoch entwickelte Unterricht in der Darstellenden Geometrie, dem in der Realschule allein fünfzehn Wochenstunden gewidmet sind, beim Uebergang der Gymnasiasten an die Technische Hochschule keinen Zeitverlust verursacht, obwohl von allen, die in der Schule keinen Unterricht in der darstellenden Geometrie erhalten haben, in den ersten Monaten des Hochschulstudiums durch eine Prüfung der Nachweis verlangt wird, daß sie sich die erforderlichen Kenntnisse selbst angeeignet haben.

Der Arbeitsausschuß des Mathematischen Reichsverbandes übersendet eine Zuschrift, die im folgenden mit der erforderlichen kurzen Erwiderung in vollem Wortlaut abgedruckt ist.

Der Herausgeber.

Herr von Mises hat eine Betrachtung »zur Neuordnung des höheren Schulwesens in Preußen« veröffentlicht[1]), zu der der »Mathematische Reichsverband« bei der Bedeutung des mathematischen Unterrichts für unsere höheren Schulen im Interesse der Sache Stellung nehmen muß.

1. Nach Herrn v. Mises muß man glauben, daß die klassischen Philologen die Forderung der Mathematiker hauptsächlich aus egoistischen Gründen unterstützen. Die von dort kommenden Aeußerungen zeigen aber deutlich, daß auch nach Ansicht der klassischen Philologen das humanistische Gymnasium einfach seinen Sinn verlieren würde, wenn es aufhörte, eine Stätte der Allgemeinbildung im recht verstandenen Sinne zu sein. Nur aus dieser Erkenntnis heraus fordern sie auch für das Gymnasium eine ausreichende Anzahl von Mathematikstunden[2]).

2. Herr v. Mises bezweifelt, daß für den Ergänzungsunterricht künftiger Studierender der Technischen Hochschulen mindestens 1—2 Semester erforderlich wären, wenn entsprechend den ursprünglichen Plänen des Ministeriums 4 Wochenstunden an den Gymnasien ausfielen. Er steht mit dieser Meinung zweifellos im Gegensatz zu einer ganzen Reihe sachverständiger Hochschullehrer (vergl. z. B. Stimmen gegen die Neuordnung usw.).

Auch bisher schon mußten die Studierenden an den Technischen Hochschulen, wenigstens soweit sie vom Gymnasium kamen, sehr erhebliche Lücken ausfüllen. Es wurden zu diesem Zweck schon vor längerer Zeit Vorkurse an den Hochschulen eingerichtet, in denen versucht wurde, diese Lücken durch 8 Wochenstunden während des Monats Oktober, je 4 Wochenstunden im November und Dezember und 2 Wochenstunden vom Januar bis zum März einigermaßen auszufüllen. (Diese Ziffern gelten für die Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg). Es zeigte sich, daß diese Vorkurse nicht ausreichten; aber der Gedanke, die Anzahl der Wochenstunden noch zu vergrößern, konnte nicht in Frage kommen, weil außer den Lücken in Mathematik ebenso erhebliche in Physik, Chemie und in Darstellender Geometrie auszufüllen waren und überdies in den ersten Semestern schon so große Ansprüche an die Arbeitsleistung der Studierenden gestellt werden müssen, daß in dem laufenden Semester die Durchführung der Vorbereitungskurse nicht einmal in dem geschilderten Umfange möglich war.

Eigentlich war also schon jetzt die Verlängerung des Studiums für Gymnasiasten um ein Semester notwendig, und nur die Scheu vor einer solchen für die Eltern schwer tragbaren Maßregel hat die Hochschulen von diesem Schritt abgehalten. Danach aber ist klar, daß jede weitere Einschränkung des mathematischen Unterrichtes an den höheren Schulen verhängnisvoll wirken und mit Notwendigkeit die Verlängerung des Hochschulstudiums um mindestens ein Semester nach sich ziehen würde.

Dazu kommt noch die pädagogisch wichtige Tatsache, daß die vier ausfallenden Wochenstunden in das 14 bis 18te Lebensjahr, also in eine für die rezeptive Geistestätigkeit entscheidende Zeit fallen und dadurch in der Tat eine Lücke schaffen, die nur bei hervorragender Begabung ausnahmsweise in kürzerer Zeit ausgeglichen werden könnte.

3. Wenn Herr v. Mises die Minimalforderung des M. R. von vier Wochenstunden durch den Hinweis auf die österreichischen Verhältnisse entkräften zu können glaubt, so erscheint dieser Einwand kaum stichhaltig gegenüber der Tatsache, daß der IMUK-Bearbeiter des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien, Dr. E. Dintzl (Schrift III der Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich) die geringen Erfolge und das gehetzte Arbeiten in den österreichischen humanistischen Gymnasien beklagt. Auch mag auf

[1]) Diese Zeitschr. 4 (1924), S. 445 bis 447.

[2]) Wir verweisen auf die Aeußerung von Werner Jäger in der Schulkonferenz am 21. und 22. Mai 1924 (vergl. Stimmen gegen die Neuordnung usw. S. 25 und 29) und auf die vortreffliche Denkschrift des preußischen Landesverbandes gymnasialer Vereinigungen (Vereine der Freunde des humanistischen Gymnasiums).

das bekannte Urteil von Kerschensteiner, einem sachverständigen Schulmann und genauen Kenner der österreichischen Verhältnisse, hingewiesen werden (vergl. Stimmen, S. 35).

4. Nicht nur der M. R. »will die Mathematik in die Kulturkunde einbeziehen«, sondern dieselbe Forderung wird mit großer Entschiedenheit auch von anderen Seiten erhoben (vergl. z. B. Stimmen, S. 17 und 20).

Nebenbei bemerkt, lautet die endgültige Fassung des ersten Leitsatzes des M. R. so, wie sie in den »Stimmen gegen« Seite 20 niedergelegt ist: »Mathematik gehört nebst Deutsch zur Kulturkunde und kann nicht in Parallele zu den Sprachen gesetzt werden«; abweichend von einer früheren in einem Sitzungsprotokoll enthaltenen älteren Fassung, die in den Unterrichtsblättern von deren Herausgeber veröffentlicht worden ist.

5. Herr v. Mises erkennt an, daß die moderne Schule den Gedankenkreisen neuzeitlicher Technik Rechnung tragen müsse. Es ist aber schlechthin unverständlich, daß er diese Aufgabe den Vertretern der kulturkundlichen Fächer im Sinne der ministeriellen Denkschrift (Religion, Deutsch, Geschichte, Erdkunde) zuweisen will. Wir sind der Meinung, daß technisches Verständnis auf der Schule nur im Rahmen des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes geweckt werden kann, was bei einer Verminderung der bisherigen Stundenzahlen dieser Fächer undurchführbar ist.

Zum Schlusse machen wir noch besonders auf den Zusatz 1 der inzwischen erschienenen dritten Auflage von Kleins »Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus«[1]) aufmerksam, wo sich der Verfasser ganz in unserem Sinne ausspricht.

Der Arbeitsausschuß des M. R.
I. A.: Hamel.

Erwiderung. Zu den einzelnen Punkten der Zuschrift des Arbeitsausschusses des M. R. habe ich folgendes zu bemerken:

Zu 1. Ich habe mit keinem Wort den Philologen »hauptsächlich egoistische Gründe« zugeschrieben und halte ihre Stellungnahme für eine durchaus sachliche. Davon freilich, daß die Motive so einfach und eindeutig wären, wie sie die Zuschrift darstellt, kann keine Rede sein. Doch ist hier nicht der Ort, darauf näher einzugehen.

Zu 2. Daß durch das Nachholen eines entgangenen Schulunterrichtes von einer Wochenstunde durch vier Jahre eine Studienverlängerung an den technischen Hochschulen um mindestens ein bis zwei Semester entstehen würde, halte ich nach wie vor für eine Uebertreibung allergröbster Art — die man in der Hitze des Gefechts gelegentlich gebrauchen, die man wohl auch im Hinblick auf den guten Zweck entschuldigen, die man aber gewiß nicht vernunftgemäß begründen kann. Die Argumentation der Zuschrift kann nicht über die Tatsache hinwegtäuschen, daß bisher die Absolventen des Gymnasiums ein Minus von rund dreißig Wochenstunden in Mathematik und Naturwissenschaften gegenüber den Oberreal-Absolventen ohne jeden Zeitverlust ausgleichen konnten und dabei noch anerkanntermaßen zu den besten Studierenden gehörten. Und nun soll, wenn aus den dreißig etwa vierunddreißig würden, gleich ein Verlust von mindestens ein bis zwei Semestern entstehen!

Zu 3. Mein Hinweis auf die österreichischen Verhältnisse bekämpft nicht irgend eine Forderung, sondern knüpft klar und unzweideutig an eine wörtlich wiedergegebene Auslassung des Reichsverbandes an, in welcher der völlige Unwert eines dreistündigen Mathematikunterrichts in krassen Farben geschildert wird. Ich halte es für eine in Fachkreisen genügend bekannte Tatsache, daß aus österreichischen Schulen hervorgegangene Ingenieure in verhältnismäßig sehr großer Zahl innerhalb des Deutschen Reiches gerade an solchen Stellen tätig sind, an denen besonders hohe theoretische Anforderungen gestellt werden. Demgegenüber würde es nicht viel bedeuten, wenn selbst da oder dort eine gelegentliche abfällige Aeußerung über den österreichischen Unterricht zu finden wäre. Allein von den beiden angeführten Stellen enthält die eine (Kerschensteiner) überhaupt keinen Hinweis auf die österreichischen Verhältnisse und die andere (Dintzl) klingt im Zusammenhang durchaus nicht so ungünstig. Auch hat kürzlich Herr Lietzmann, der im Auftrage des Preußischen Ministeriums eine Studienreise nach Oesterreich unternahm, sehr Günstiges berichtet[1]).

Zu 4. Daß »nur« der Reichsverband die Mathematik zur Kulturkunde zählen will, habe ich nicht behauptet. Es kam mir lediglich darauf an, die beiden kontrastierenden Gedankengänge zu skizzieren: den einen, der die Mathematik als Kulturkunde in ausdrücklichen Gegensatz zu den Sprachen setzt, und den andern, der Mathematik und Sprachen gemeinsam der Kulturkunde gegenüberstellt. Die vom Reichsverband an dem Wortlaut seines Leitsatzes inzwischen vorgenommene Aenderung ist in diesem Sinne ohne jede Bedeutung.

Zu 5. Meine Aeußerungen halte ich für nicht so unverständlich. Die Beziehungen des rein mathematischen Schulstoffes (vom naturwissenschaftlichen Unterricht war in diesem Zusammenhang nicht die Rede) zur Technik sind nur dürftig und bleiben jedenfalls ganz an der Oberfläche. Wer ernsthaft den Wunsch hat, daß den Schülern etwas Verständnis für Sinn und kulturelle Bedeutung der modernen Technik auf der Schule vermittelt wird, muß dahin wirken, daß dieser Gedanken- und Vorstellungskreis allmählich in die kulturkundlichen Fächer eindringt, die stets die stärkste und eindringlichste Wirkung auf die heranwachsende Jugend ausüben werden.

Mises. 502

[1]) J. Springer. Berlin 1924. S. 298/99.

[1]) Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw. 1924, S. 101.

Ueber „Wanderkurvenblätter." In Abschnitt 10 der beachtenswerten Ausführungen von Hrn. P. Luckey[1]) wird erwähnt, daß Nomogramme mit beweglichen Systemen sich meist nur speziellen Gleichungsformen anpassen, auf die sich Formeln der Praxis nicht bringen lassen. Als Ausnahme hiervon darf vielleicht eine besondere Art von Rechenblättern genannt werden, die an anderen Stellen[2]) eingehend behandelt und als »*Wanderkurvenblätter*« bezeichnet wurden. Derartige Nomogramme enthalten eine auf einem beweglichen Deckblatt gezeichnete Kurve, die relativ zu einem Grundblatt durch eine Schiebungsbewegung — entsprechend den gegebenen Werten — in eine leicht auffindbare Lage gebracht wird und in einfacher Weise die Ablesung des gesuchten Wertes ermöglicht. Die Herstellung dieser Rechenblätter bereitet nur geringe Mühe, wenn für Grund- und Deckblatt das fertig käufliche Logarithmenpapier mit vorgedrucktem Netz verwendet wird, wodurch die erhebliche Sorgfalt verlangende Aufzeichnung von Funktionsleitern erspart wird.

Als Beispiel hierzu sei die von Luckey[1]), Soreau[3]) und Vaes[4]) nomographisch behandelte Formel des Board of Trade für zweireihige Zickzacknietungen angeführt:

$$e = \frac{\sqrt{(11\,p + 4\,d)\,(p + 4\,d)}}{10}$$

Die Gleichung wird auf die Form gebracht:

$$e = {}^4/_{10} \cdot d \cdot \sqrt{\left(\frac{11\,p}{4\,d} + 1\right)\left(\frac{p}{4\,d} + 1\right)} = C \cdot d \cdot f\left(\frac{p}{d}\right).$$

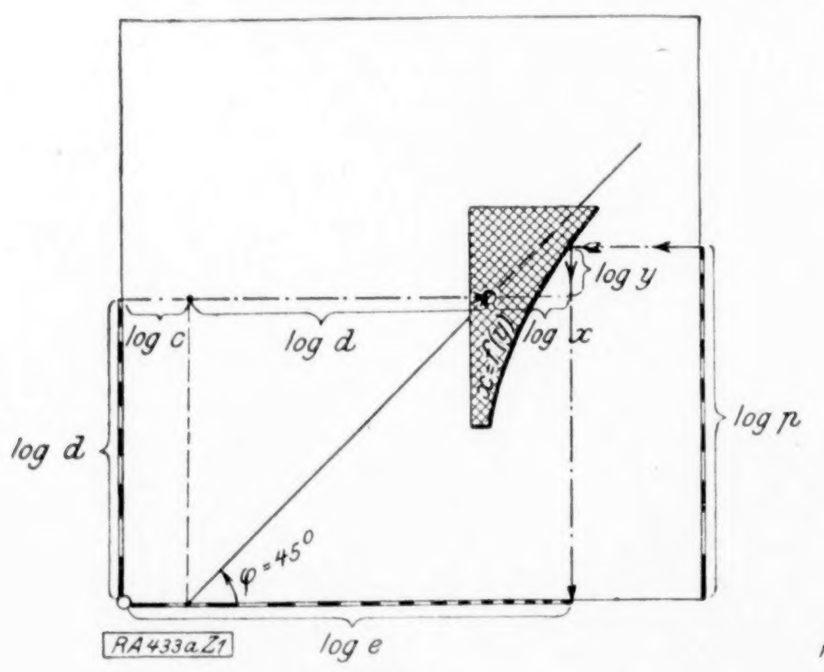


Abb. 1.

Aus Abb. 1 ist der Zusammenhang zwischen Formel und Nomogramm ohne weiteres ersichtlich; es ist:

$$\log e = \log C + \log d + \log x$$
$$x = f(y)$$
$$\log y = \log p - \log d$$
$$y = p/d$$

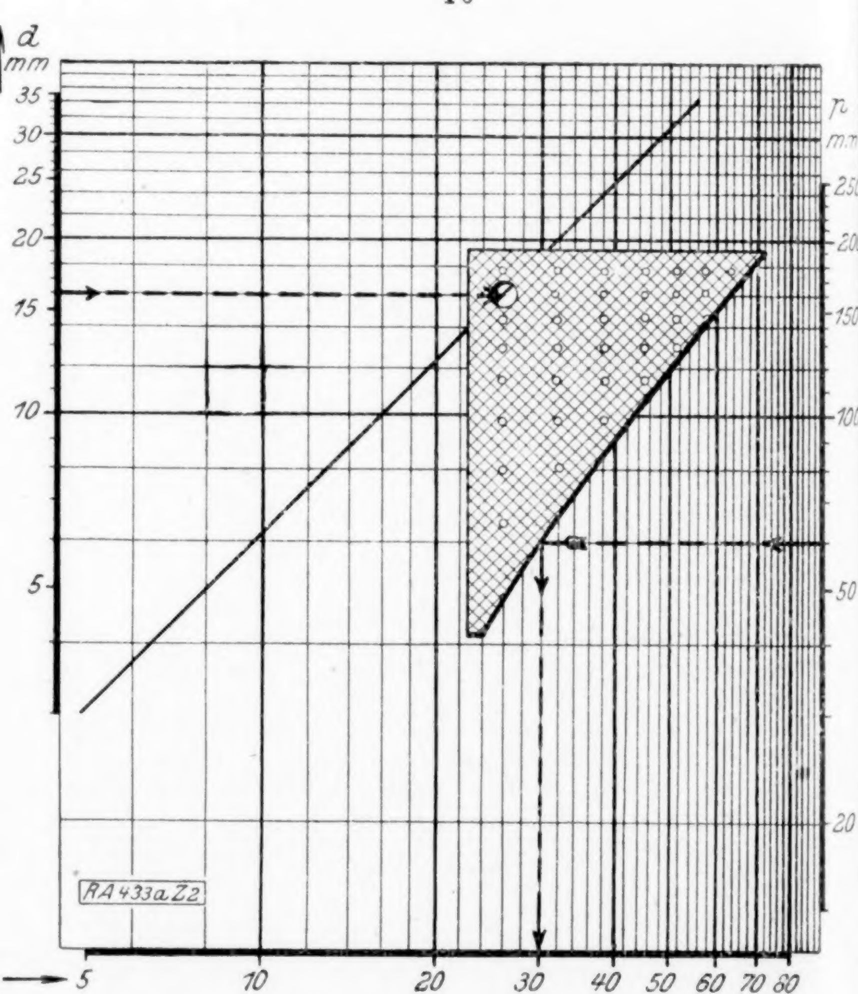
folglich: $e = C \cdot d \cdot f(p/d)$.

Das Deckblatt enthält also im vorliegenden Fall die ins logarithmische Netz gezeichnete Kurve $x = f(y) = f(p/d)$; das logarithmische Netz des Deckblattes ist in Abb. 2 durch Punkte angedeutet. Die Ermittlung des gesuchten Wertes für e geschieht in der durch Pfeillinien gekennzeichneten Weise (Abb. 2).

Ein ähnliches Nomogramm ergibt sich für die von Luckey[1]) und Soreau behandelte

Wanderkurvenblatt zur Ermittlung des Abstandes »e« der beiden Nietreihen nach der Formel des Board of Trade für zweireihige Zickzacknietung:

$$e = \frac{\sqrt{(11\,p + 4\,d)\,(p + 4\,d)}}{10}$$



Beispiel: d . . . . Durchmesser der Niete . . . 16 mm
p . . . . Abstand zweier Niete . . . 60 mm
e . . . Abstand der Nietreihen . . . 30 mm.

Abb. 2.

Formel:

$$L = \pi\,[{}^3/_2\,(a + b) - \sqrt{a \cdot b}],$$

wenn sie umgewandelt wird in:

$$L = \pi \cdot b \cdot f\,(a/b).$$

Auch die in einem anderen Aufsatz[5]) in dieser Zeitschrift von Luckey nomographisch

[1]) »Die Verstreckung (Anamorphose) und die nomographische Ordnung«. Diese Zeitschrift, 4, 1924, S. 61 ff.

[2]) Sitzung des Aussch. f. techn. Mech. vom 28. 1. 24; vergl. V. d. I.-Bezirks-Nachrichten (Brandenburg) 26. 3. 24; ferner: Kretschmer, Einige besondere nomographische Verfahren und ihre Anwendung auf technische Formeln, Dr.-Ing.-Diss., Berlin 1924.

[3]) Soreau. Traité des Abaques, Paris 21, Bd. I.

[4]) Vaes, Technische Rekenplaten, Kon. Inst. van Ingenieurs, 1904.

[5]) Diese Zeitschrift, 3, 1923, S. 46 ff.

dargestellte Formel

$$v = \pi/3 \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) = \pi/3 \cdot h \cdot r \cdot f\,(R/r)$$

kann mittels eines ähnlichen Wanderkurvenblattes ausgewertet werden; hierbei wird jedoch die Leiter für h zweckmäßig auf dem Deckblatt angebracht, d. h. der in Abb. 2 durch ein Loch gekennzeichnete Fixpunkt ist bei diesem Beispiel dem jeweils gegebenen Wert für h entsprechend in wagerechter Richtung verschiebbar. Wird dieser Punkt des Deckblattes, der stets mit einem vorher auf dem Grundblatt ermittelten Punkt zur Deckung zu bringen ist, auch in senkrechter Richtung verschoben (vergl. Abb. 3), so besteht die Möglichkeit,

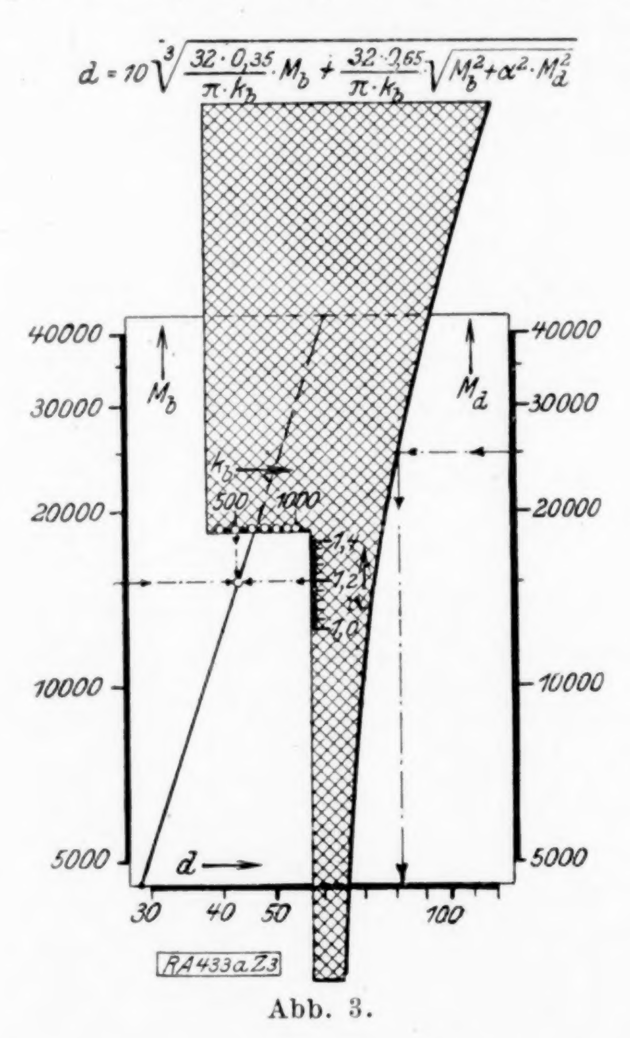


Abb. 3.

Formeln mit sechs Veränderlichen[1]) durch ein Wanderkurvenblatt darzustellen. Als Beispiel sei die von L u c k e y, v. D o b b l e r[2]), V o g e l[3]) und K o n o r s k i[4]) nomographisch behandelte Formel in Abb. 3 schematisch wiedergegeben. Die Gleichung, die fünf Veränderliche enthält, lautet:

$$d = 10\sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0{,}35}{\pi \cdot k_b} \cdot M_b + \frac{32 \cdot 0{,}65}{\pi \cdot k_b} \cdot \sqrt{M_b^2 + \alpha^2 \cdot M_d^2}}$$

[1]) Die »Schlüsselgleichung« mit sechs Veränderlichen ist in dem in der »Deutschen Uhrmacher-Zeitung« (Heft 36, 1924) inzwischen veröffentlichten Aufsatz vom Verf. angegeben. Vergl. ferner das kürzlich im Verlag S p r i n g e r erschienene Lehrbuch der Nomographie von H. S c h w e r d t, S. 155.

[2]) Herausgeg. v. d. betriebstechn. Abt. d. V. d. I., Berlin.

[3]) Zeitschrift »Werkstattechnik«, 1921, S. 534 und 540.

[4]) K o n o r s k i, Grundlagen der Nomographie, Verl. Springer 1923, S. 84/85.

und wird auf die Form gebracht:

$$d = C \cdot k_b^{-1/3} \cdot M_b^{1/3} \cdot f\left(\frac{\alpha \cdot M_d}{M_b}\right);$$

bis auf den Parameterwert k_b können bei Verwendung des Logarithmenpapiers für sämtliche Veränderlichen die vorgedruckten Teilungen benutzt werden.

Auch auf die von H a k[5]) in der vorliegenden Zeitschrift behandelten Formeln ist diese Darstellungsart anwendbar; als besonders geeignetes Beispiel sei die außer von H a k[6]) auch von v. D o b b l e r und C r a n z[7]) nomographisch wiedergegebene Formel erwähnt:

$$r_a = r_i \cdot \sqrt{\frac{k + 0{,}6\,p}{k - 1{,}3\,p}} = r_i \cdot f\left(\frac{p}{k}\right).$$

Die von P f l i e g e r - H a e r t e l[8]) angegebenen Nachteile der H a k schen Darstellungsart treffen bei den Wanderkurvenblättern nicht zu; in diesem Zusammenhang sei für den Fall, daß im ersten Beispiel (Abb. 2) nicht d und p, sondern p und e gegeben sind, noch folgender Ablesungsweg kurz beschrieben: Das Deckblatt wird um 180° gedreht und (auf dem Kopf stehend) so auf das Grundblatt aufgelegt, daß der Punkt mit dem durch p und e gegebenen Koordinaten in dem Loch des Deckblattes sichtbar wird; die Ordinate des Schnittpunktes der Kurve des Deckblattes mit der schrägen Geraden des Grundblattes ergibt alsdann den gesuchten Wert für d.

Wanderkurvenblätter, die aus einem Grundblatt und mehreren Deckblättern bestehen, dienen zur nomographischen Lösung einer Gruppe von — oft im Zusammenhang benutzten — Formeln, in denen zum Teil die gleichen Veränderlichen auftreten, aber in verschiedener Weise voneinander abhängig sind. Abb. 4 zeigt als Beispiel hierzu das Schema eines Wanderkurvenblattes für drei, im Eisenbetonbau gebräuchliche Formeln, für die J a c k i[9]) eine Reihe von Fluchtenrechtecken mit beweglichem Ablesekreuz entworfen hat. Die Formeln lauten:

$$f_e = \sqrt{\frac{M \cdot b}{\sigma_b}} \cdot \frac{\sqrt{7{,}5}}{\sigma_e/\sigma_b \cdot \sqrt{\sigma_e/\sigma_b + 10}} = \sqrt{\frac{M \cdot b}{\sigma_b}} \cdot \varphi_1\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_b}\right),$$

$$h' = \sqrt{\frac{M}{b \cdot \sigma_b}} \cdot \frac{\sigma_e/\sigma_b + 15}{\sqrt{7{,}5} \cdot \sqrt{\sigma_e/\sigma_b + 10}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{M \cdot b}{\sigma_b}} \cdot \varphi_2\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_b}\right),$$

$$x = \sqrt{\frac{M}{b \cdot \sigma_b}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\sigma_e/\sigma_b + 10}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{M \cdot b}{\sigma_b}} \cdot \varphi_3\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_b}\right).$$

Folgendes in Abb. 4 wiedergegebene Zahlenbeispiel erläutert das Ableseverfahren für den Fall, daß f_e, h' und x gesucht werden, wenn M, b, σ_b und σ_e gegeben sind: Auf Deckblatt I

[5]) Diese Zeitschrift, 1, 1921, S. 156/57.

[6]) Diese Zeitschrift, 2, 1922, S. 471.

[7]) C r a n z, Ueber das Entwerfen von Nomogrammen, Verl. Bath, Bln., 1919, S. 55.

[8]) Diese Zeitschrift, 3, 1923, S. 79.

[9]) Zeitschrift »Beton und Eisen« 1924 Heft 7, S. 77 ff; (den Hinweis auf diesen Aufsatz verdanke ich Herrn Reg.-Bmstr. E i s n e r).

ergibt die Verbindungslinie der Punkte, die den Werten $M = 8500$ mkg und $b = 51$ cm entsprechen, an der Unterkante des Schlitzes einen Punkt, der mit dem Wert $\sigma_b = 36$ kg/cm² auf dem Grundblatt zur Deckung zu bringen ist. Hierdurch ist Deckblatt I festgelegt; sodann geht man von dem $\sigma_e = 1090$ kg/cm² entsprechenden Teilstrich (auf der rechten oberen σ_e - Skala) wagerecht bis zur Deckblattkurve und von dort aufwärts bis zur f_e-Skala, die in $f_e = 15{,}7$ cm² getroffen wird.

Deckblatt II wird so auf das Grundblatt aufgelegt, daß die Marke (↑) an der Oberkante des Deckblattes II auf den gegebenen Wert von $b = 51$ cm an der Unterkante des Deckblattes I weist. Die Ablesung der gesuchten Werte erfolgt von den beiden unteren σ_e-Skalen aus wieder im Winkelweg und ergibt $x = 18{,}6$ cm und $h' = 56$ cm. Auf die Herstellung dieser verhältnismäßig einfach anzufertigenden Tafel wird an anderer Stelle[1]) ausführlich eingegangen werden; hervorgehoben sei nur, daß bei Verwendung des fertigen Logarithmenpapiers wieder für sämtliche Veränderlichen die vorgedruckten Teilungen benutzt werden können.

Auf andere Erweiterungsmöglichkeiten, wie Verschiebung und gleichzeitige Drehung des Deckblattes oder Aenderung des Ablesungsweges (statt Umlenkung um 90° ist eine Tangente an die Deckblattkurve bei jeder Ablesung zu ziehen) sei hier nur hingewiesen.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Durch Anwendung von Wanderkurvenblättern können unter gleichzeitiger Benutzung eines vorgedruckten Logarithmennetzes zahlreiche technische Formeln mit additiven Gliedern und empirischen[2]) Funktionen verhältnismäßig einfach dargestellt werden, so daß die zeitraubende und meist recht ungenaue Aufzeichnung von Funktionsleitern und Kurvenscharen erspart und die Anfertigung nomographischer Rechenblätter erleichtert und vereinfacht wird.

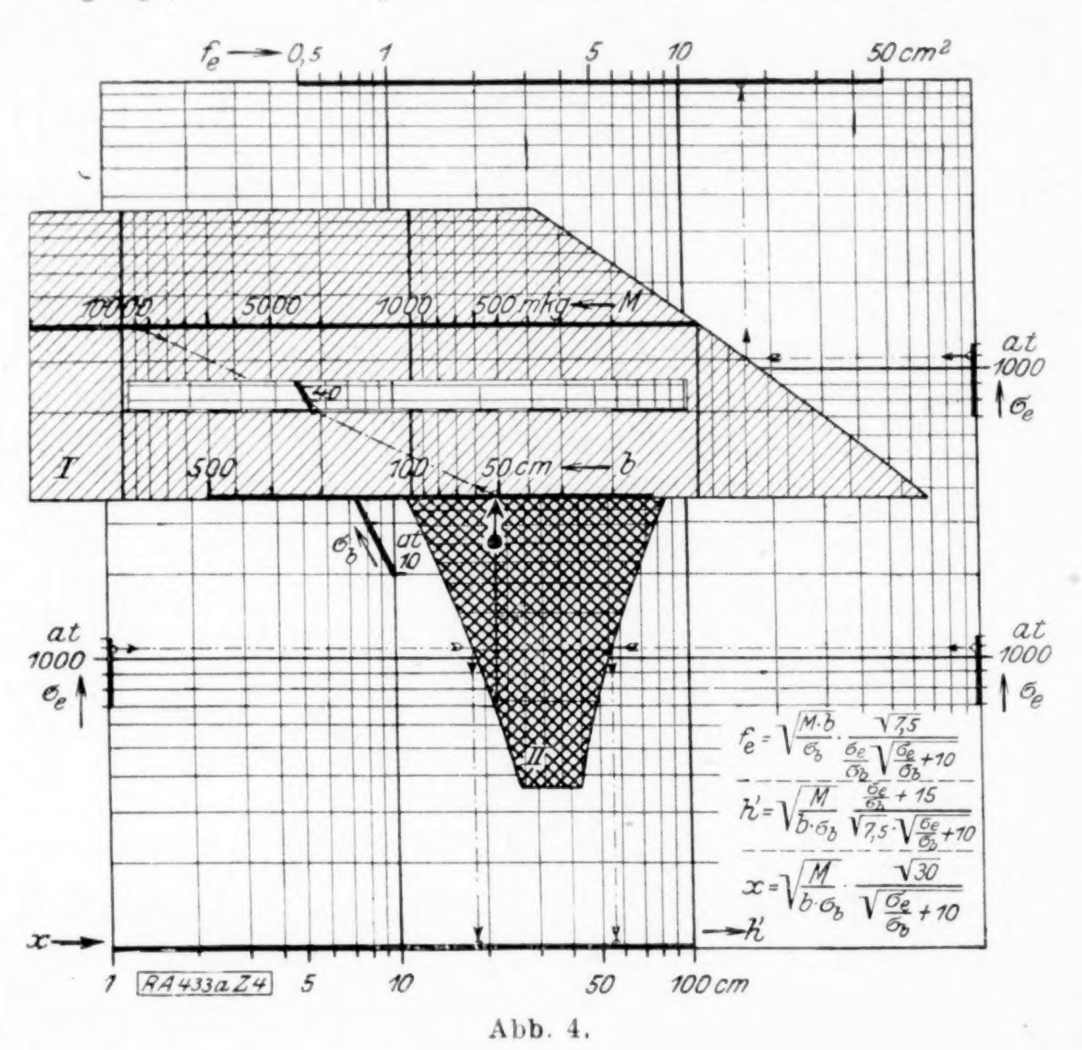


Abb. 4.

Berlin, im März/April 1924.

Walter Kretschmer. 433a

(Hr. Luckey, dem diese Zuschrift vorgelegen hat, erwidert darauf in einem besonderen Aufsatz, der in dem folgenden Heft veröffentlicht werden wird. Der Herausgeber.)

[1]) Inzwischen veröffentlicht in »Beton und Eisen«, 1925, Heft 3, S. 34 ff.

[2]) Nomogramme, die wirtschaftliche Erfahrungswerte enthalten und durch Einfügen von empirischen Wanderkurven noch erweitert werden könnten, behandelt Eisner im »Bauingenieur«, 1923, S. 547 ff.

Berichtigung.

Die in meinem Aufsatz »Achsensymmetrische Deformation von Rotationskörpern« in Bd. 4 (1924) dieser Zeitschr., S. 361, Fußnote 7, enthaltene Bemerkung, wonach Hr. Th. Pöschl in seinem zusammenfassenden Bericht über Torsion meine Abhandlung — Math. Ann. 71 (1911), S. 480 — nicht erwähnt, bezog sich auf den ersten Pöschlschen Bericht in Bd. 1 (1921). In dem zweiten zusammenfassenden Bericht des Hrn. Pöschl in Bd. 2 (1922), der mir entgangen war, wird sie ausführlich gewürdigt.

A. Timpe.

(Redaktionsschluß 20. April 1925.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.